Восемнадцатый международный математический турнир старшеклассников “Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Саров, 1-8 ноября 2014 года

**КОМАНДНАЯ ОЛИМПИАДА 02.11.14. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЮНИОРОВ**

**1.** Сколькими различными способами можно разбить натуральные числа от 1 до 100 на 50 групп так, чтобы суммы чисел во всех группах были одинаковыми? (Фольклор)

**2.** Даны пять различных чисел. Рассматриваются всевозможные графики прямых вида *y* = *ax*+*b*, где *a* и *b* – какие-то два из данных пяти чисел. Докажите, что на координатной плоскости найдётся прямая, не проходящая через начало координат, которую эти графики пересекают не более чем в десяти различных точках. (И. Рубанов)

**3.** Даны три кучи камней, в которых лежат соответственно *a*, *b* и *c* камней (числа *a*, *b* и *c* различны). Два игрока делают ходы по очереди. При своём ходе игрок должен выбрать две кучи и переложить один или несколько камней из меньшей кучи в большую (если кучи равны, он выбирает направление перекладывания по своему усмотрению). Выигрывает тот, кому удалось собрать все камни в одной куче. Кто выиграет при правильной игре – начинающий или его партнёр? (Словения, 2014)

**4.** Две окружности Ω1 и Ω2 касаются внешним образом в точке *Q*. Их общая внешняя касательная касается Ω1 в точке *B*. Через точку *A*, диаметрально противоположную *B*, проведена касательная к Ω2, которая касается этой окружности в точке *C*, лежащей по ту же сторону от прямой *AQ*, что и *B*. Докажите, что Ω1 делит отрезок *BC* пополам. (И. Нагель, Киев, 2013)

**5.** Для натурального *k* определим последовательность *a*1, *a*2, … условиями *a*1 = *k*+1 и *an*+1 = *a*1*a*2…*an* + *k* при всех натуральных *n*. При каких *k* в этой последовательности бесконечно много точных квадратов? (По мотивам задачи с отбора Боснии и Герцеговины на ММО 2012 г.)

**6.** Дана последовательность длины *n* (*n* ≥ 2), состоящая из нулей и единиц. Несколько цифр, стоящих подряд (возможно, одна), образуют *подпалиндром*, если последовательность этих цифр одинаково читается от начала к концу и от конца к началу. Какое наименьшее количество подпалиндромов может быть в последовательности? (Европейский математический кубок, 2013)

**7.** Дан остроугольный треугольник *ABC*. Перпендикуляр из *B* к прямой *AC* пересекает окружность, построенную на *AC*, как на диаметре, в точках X и *Y* (*X* ближе к *B*, чем *Y*). Аналогично перпендикуляр из *C* к прямой *AB* пересекает окружность, построенную на *AB* как на диаметре, в точках *Z* и *T* (*Z* ближе к *C*, чем *T*). Докажите, что прямые *XZ*, *YT* и *BC* пересекаются в одной точке либо параллельны. (Бразилия, 2013)

Восемнадцатый международный математический турнир старшеклассников “Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Саров, 1-8 ноября 2014 года

**КОМАНДНАЯ ОЛИМПИАДА 02.11.14. ЗАДАНИЯ ДЛЯ СЕНЬОРОВ**

**1.** Десять человек стоят по кругу. Они пронумерованы по часовой стрелке числами от 1 до 10. У каждого есть некоторая сумма денег; все суммы разные. Первым ходом люди с номерами 1 и 2 сравнивают свои капиталы, и тот, у кого больше денег, отдаёт другому разность их капиталов (например, если у первого 3 рубля, а у второго – пять, то второй отдаёт первому 2 рубля). Вторым ходом ту же процедуру производят второй с третьим, затем – третий с четвёртым и т.д., по кругу. Докажите, что через 90 ходов у каждого будет столько же денег, сколько вначале. (И. Богданов)

**2.** На складе лежат пакеты, каждый весит либо 11, либо 12 кг (оба веса пакетов присутствуют). Общий вес пакетов – 49500 кг. Докажите, что их можно разложить на 11 куч одинакового веса. (Аргентина, национальный этап, 2012, изменено)

**3.** Две окружности Ω1 и Ω2 касаются внешним образом в точке *Q*. Их общая внешняя касательная касается Ω1 в точке *B*. Пусть *AB* – диаметр Ω1, а точка *C* на Ω2 такова, что прямая *AC* касается Ω2. Докажите, что Ω1 делит отрезок *BC* пополам. (И. Нагель, Киев, 2013)

**4.** Для натурального *k* определим последовательность *a*1, *a*2, … условиями *a*1 = *k*+1 и *an*+1 = *a*1*a*2…*an* + *k* при всех натуральных *n*. При каких *k* в этой последовательности бесконечно много точных квадратов? (Д. Карпов по мотивам задачи с отбора Боснии и Герцеговины на ММО 2012 г.)

**5.** Дана последовательность длины *n* (*n* ≥ 2), состоящая из нулей и единиц. Несколько цифр, стоящих подряд (возможно, одна), образуют *подпалиндром*, если последовательность этих цифр одинаково читается от начала к концу и от конца к началу. Какое наименьшее количество подпалиндромов может быть в последовательности? (Европейский математический кубок, 2013)

**6.** В остроугольном треугольнике *ABC* точка *K* – середина *AC*. На сторонах *AB* и *BC* как на основаниях внутрь треугольника построены равнобедренные треугольники *ABM* и *BCN* так, что ∠*AMB* = ∠*AKB*, *AM*= *BM* и ∠*BNC* = ∠*BKC*, *CN*= *BN*. Докажите, что окружность, описанная около треугольника *MNK*, касается стороны *AC*. (А. Антропов)

**7.** Пусть *n*= 100000. Неотрицательные числа *a*1, *a*2, …, *an*, *b*1, *b*2, …, *bn*, *c*1, *c*2, …, *cn* таковы, что *a*1+…+*an* = *b*1+…+*bn* = *c*1+…+*cn* = 1 и все числа вида  не превосходят 1/*n*. Найдите наибольшее возможное значение суммы . (И. Богданов по мотивам MathOverflow)

**8.** Дано натуральное число *n*. Двое играют в такую игру. Изначально на столе лежит 2*n*+1 рублёвых монет, а на доске написано число *a*= 1. Игроки ходят по очереди. Каждым ходом игрок либо не меняет, либо увеличивает на 2 число *a*, после чего забирает *a* монет со стола. Игра заканчивается, когда на столе остаётся меньше, чем *a* монет; выигрывает тот, у кого в этот момент монет больше, а если монет у игроков поровну, игра заканчивается вничью. Каким будет результат игры при правильной игре обоих игроков? (MathOverflow: R. Bacher, D. Zare)

Восемнадцатый международный математический турнир старшеклассников “Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Саров, 1-8 ноября 2014 года

**Решения задач командной олимпиады младшей группы.**

***Задача 1*.** *Сколькими различными способами можно разбить натуральные числа от 1 до 100 на 50 групп так, чтобы суммы чисел во всех группах были одинаковыми?*

Ответ. Одним. Решение. Так как сумма чисел от 1 до 100 равна 5050, сумма чисел в каждой группе должна равняться 5050:50 = 101. Поэтому число 100 может оказаться в одной группе только с числом 1, и других чисел в этой группе быть не может. Отбросив числа 100 и 1, аналогично докажем, что 99 должно быть в одной группе с двойкой, 98 – с тройкой, …, 51 – с 50.

***Задача 2***. *Даны пять различных чисел. Рассматриваются всевозможные графики прямых вида y = ax+b, где a и b – какие-то два из данных пяти чисел. Докажите, что на координатной плоскости найдётся прямая, не проходящая через начало координат, которую эти графики пересекают не более чем в десяти различных точках.*

Решение. Заметим, что при любых *a* и *b* прямые *y = ax+b* и *y = bx+a* пересекаются на прямой *x* = 1: *ax+b* = *bx+a* ⇔ (*a*–*b*)*x* = *a*–*b* ⇔ *x* = 1. Всего у нас 20 прямых: *a* можно выбрать пятью способами, *b* – четырьмя. Поэтому наши прямые имеют с прямой *x* = 1 не больше 20:2 = 10 общих точек.

***Задача 3*.** *Даны три кучи камней, в которых лежат соответственно a, b и c камней (числа a, b и c различны). Два игрока делают ходы по очереди. При своём ходе игрок должен выбрать две кучи и переложить один или несколько камней из меньшей кучи в большую (если кучи равны, он выбирает направление перекладывания по своему усмотрению). Выигрывает тот, кому удалось собрать все камни в одной куче. Кто выиграет при правильной игре – начинающий или его партнёр?*

Ответ. Начинающий. Решение. Первым ходом начинающий уравнивает число камней в двух меньших кучах, переложив «лишние» камни из большей из них в самую большую. Затем, если второй предыдущим ходом переложил сколько-то камней из одной из малых куч в самую большую, начинающий перекладывает в самую большую кучу столько же камней из второй малой кучи. Если же второй предыдущим ходом переложил сколько-то камней из одной из малых куч (назовём её *X*) в другую (назовём её *Y*), первый выбирает из кучи *Y* и третьей кучи ту, которая меньше (а если они равны, то любую), и своим ходом уравнивает её с *X*. Так как при такой игре первого после хода второго в двух малых кучах всегда будет не поровну камней, второй не сможет выиграть, а так как игра конечна, выиграет первый.

***Задача 4*.** *Две окружности Ω1 и Ω2 касаются внешним образом в точке Q. Их общая внешняя касательная касается Ω1 в точке B. Через точку A, диаметрально противоположную B, проведена касательная к Ω2, которая касается этой окружности в точке C, лежащей по ту же сторону от прямой AQ, что и B. Докажите, что Ω1 делит отрезок BC пополам.*

Решение. Пусть *BC* пересекает Ω1 в точке *X*. Так как *AB* – диаметр, то *AX* ⊥ *BC*, и *AX* – высота треугольника *ABC*. Значит, для того, чтобы получить *BX* = *CX*, достаточно показать, что *AB* = *AC*. Пусть *AQ* вторично пересекает Ω2 в точке *P*. Из подобия равнобедренных треугольников *AO*1*Q* и *PO*2*Q* (*O*1 и *O*2 – центры окружностей) следует, что *AO*1 || *PO*2 || *AB*. Но *AB* перпендикулярна общей касательной, следовательно, касательная к Ω2 в точке *P* совпадает с общей касательной. Отсюда ∠*ABP* = 90°. *BQ* – высота прямоугольного треугольника *ABP* (*BQ* ⊥ *AP*, поскольку *AB* – диаметр), значит, *AB*2 = *AP*⋅*AQ*. Но по теореме о касательной и секущей *AP*⋅*AQ* = *AC*2.

***Задача 5*.** *Для натурального k определим последовательность a1, a2, … условиями a1 = k+1 и an+1 = a1a2…an + k при всех натуральных n. При каких k в этой последовательности бесконечно много точных квадратов?*

Ответ. При *k* = 4. Решение. Заметим, что *an*+1 = *a*1*a*2*…an* + *k* = *an*(*an*–*k*)+*k*. С помощью полученного равенства по индукции легко проверить, что при нечётном *k* число *an* даёт при делении на 4 остаток 3 для всех *n* ≥ 2, и потому в последовательности *an* не более одного точного квадрата. Если же *k* чётно, то *an*+1 = *an*(*an*–*k*)+*k* = (*an*–*k*/2)2+(*k*–*k*2/4). Поскольку *an* неограниченно возрастает, с какого-то момента оно станет настолько велико, что расстояния от (*an*–*k*/2)2 до соседних квадратов станут больше, чем |*k*–*k*2/4|. Если *k*–*k*2/4 ≠ 0, с этого момента в последовательности не будет ни одного точного квадрата. Если же *k*–*k*2/4 = 0, то *k* = 4, и все *an*, начиная со второго, будут точными квадратами.

***Задача 6*.** *Дана последовательность длины n (n ≥ 2), состоящая из нулей и единиц. Несколько цифр, стоящих подряд (возможно, одна), образуют подпалиндром, если последовательность этих цифр одинаково читается от начала к концу и от конца к началу. Какое наименьшее количество подпалиндромов может быть в последовательности?*

Ответ. 2*n*–2. Решение. *Оценка*. Индукция по числу символов. При *n* = 2 палиндромов хотя бы два – каждый из символов. При *n* = 3 – хотя бы четыре: три символа и одна из конфигураций *aa* или *aba*. Пусть уже доказано, что при *n* = *k* (*k* ≥ 3) палиндромов не меньше, чем 2*k*–2. Добавим справа символ *a*. Он сам по себе палиндром, и если в последовательности, к которой мы его дописали, есть хотя бы одна буква *a*, то добавился ещё палиндром вида *ab…ba*; в противном случае та последовательность состояла из *k* букв *b*, и в ней было не менее, чем *k*+(*k*–1)+…+1 = *k*(*k*+1)/2 ≥ 2*k* палиндромов. Как видим, в обоих случаях палиндромов будет не меньше, чем 2(*k*+1)–2 = 2*k*. *Пример*. Рассмотрим последовательность 100110100110… (период 6). Примером для любого *k* служит её начальный отрезок длины *k*. В самом деле, в отрезке 10 два палиндрома, в отрезке 100 – четыре палиндрома, а далее перебором шести случаев нетрудно убедиться, что добавление каждого следующего знака увеличивает количество палиндромов ровно на два.

***Задача 7*.** *Дан остроугольный треугольник ABC. Перпендикуляр из B к прямой AC пересекает окружность, построенную на AC, как на диаметре, в точках X и Y (X ближе к B, чем Y). Аналогично перпендикуляр из C к прямой AB пересекает окружность, построенную на AB как на диаметре, в точках Z и T (Z ближе к C, чем T). Докажите, что прямые XZ, YT и BC пересекаются в одной точке либо параллельны.*

Решение. Пусть *AD* – высота треугольника *ABC*, *H* – его ортоцентр. Точки *D*, *X*, *Y* лежат на окружности, построенной на *AC* как на диаметре, причем дуги *AY* и *AX* равны (*X* и *Y* симметричны относительно диаметра), отсюда ∠*XDH* = ∠*YDH*. Таким образом, *DH* – биссектриса, а *DB* – внешняя биссектриса для треугольника *XDY*. Отсюда *XH*/*YH* = *XD*/*YD* = *XB*/*YB*, поэтому *BX*/*XH* = *BY*/*YH* = α. Аналогично доказываем, что *C*Z/Z*H* = *CT*/*TH* = β. Если α = β, то *X*Z || *YT* || *BC*. Иначе, согласно теореме Менелая, обе прямые *X*Z и *YT* пересекают продолжение отрезка *BC* в точке *P* такой, что *BP*/*CP* = α/β.

Восемнадцатый международный математический турнир старшеклассников “Кубок памяти А.Н. Колмогорова”

Саров, 1-8 ноября 2014 года

**Решения задач командной олимпиады старшей группы.**

***Задача 1*.** *Десять человек стоят по кругу. Они пронумерованы по часовой стрелке числами от 1 до 10. У каждого есть некоторая сумма денег; все суммы разные. Первым ходом люди с номерами 1 и 2 сравнивают свои капиталы, и тот, у кого больше денег, отдаёт другому разность их капиталов (например, если у первого 3 рубля, а у второго – пять, то второй отдаёт первому 2 рубля). Вторым ходом ту же процедуру производят второй с третьим, затем – третий с четвёртым и т.д., по кругу. Докажите, что через 90 ходов у каждого будет столько же денег, сколько вначале.*

Решение. Заметим, что описанный в условии ход можно описать как обмен двоих участвующих в нём своими капиталами. Поэтому через 9 ходов, когда исходный капитал первого окажется у десятого, капитал каждого окажется у его соседа в направлении против часовой стрелки. За 90 ходов каждый капитал обойдёт полный круг против часовой стрелки и окажется у своего первоначального владельца.

***Задача 2*.** *На складе лежат пакеты, каждый весит либо 11, либо 12 кг (оба веса пакетов присутствуют). Общий вес пакетов – 49500 кг. Докажите, что их можно разложить на 11 куч одинакового веса.*

Решение. Пусть на складе *a* пакетов по 11 кг и *b* пакетов по 12 кг. По условию 11*a*+12*b* = 49500 = 375⋅11⋅12. Так как числа 12 и 11 взаимно просты, *b* делится на 11, а *a* делится на 12. Поэтому пакеты весом 11 кг можно разложить на кучки по 12 шт, а пакеты весом 12 кг – на кучки по 11 шт. И те, и другие кучки будут весить по 11⋅12 = 132 кг.

Каждая из 11 искомых куч должна весить 49500:11 = 4500 кг. По условию у нас есть 12-килограммовые пакеты. Расформируем одну из их 132-килограммовых кучек и положим в основу каждой из будущих 11 куч по одному 12-килограммовому пакету из неё. К каждой основе надо добавить по
4500–12 = 4488 кг. Так как 4488 делится на 132, мы сумеем это сделать с помощью заготовленных нами куч весом 132 кг.

***Задача 3*.** *Две окружности Ω1 и Ω2 касаются внешним образом в точке Q. Их общая внешняя касательная касается Ω1 в точке B. Через точку A, диаметрально противоположную B, проведена касательная к Ω2, которая касается этой окружности в точке C, лежащей по ту же сторону от прямой AQ, что и B. Докажите, что Ω1 делит отрезок BC пополам.*

Решение. Пусть *BC* пересекает Ω1 в точке *X*. Так как *AB* – диаметр, то *AX* ⊥ *BC*, и *AX* – высота треугольника *ABC*. Значит, для того, чтобы получить *BX* = *CX*, достаточно показать, что *AB* = *AC*. Пусть *AQ* вторично пересекает Ω2 в точке *P*. Из подобия равнобедренных треугольников *AO*1*Q* и *PO*2*Q* (*O*1 и *O*2 – центры окружностей) следует, что *AO*1 || *PO*2 || *AB*. Но *AB* перпендикулярна общей касательной, следовательно, касательная к Ω2 в точке *P* совпадает с общей касательной. Отсюда ∠*ABP* = 90°. *BQ* – высота прямоугольного треугольника *ABP* (*BQ* ⊥ *AP*, поскольку *AB* – диаметр), значит, *AB*2 = *AP*⋅*AQ*. Но по теореме о касательной и секущей *AP*⋅*AQ* = *AC*2. Значит, *AB* = *AC*, что и требовалось доказать.

***Задача 4*.** *Для натурального k определим последовательность a1, a2, … условиями a1 = k+1 и an+1 = a1a2…an + k при всех натуральных n. При каких k в этой последовательности бесконечно много точных квадратов?*

Ответ. При *k* = 4. Решение. Заметим, что *an*+1 = *a*1*a*2*…an* + *k* = *an*(*an*–*k*)+*k*. С помощью полученного равенства по индукции легко проверить, что при нечётном *k* число *an* даёт при делении на 4 остаток 3 для всех *n* ≥ 2, и потому в последовательности *an* не более одного точного квадрата. Если же *k* чётно, то *an*+1 = *an*(*an*–*k*)+*k* = (*an*–*k*/2)2+(*k*–*k*2/4). Поскольку *an* неограниченно возрастает, с какого-то момента оно станет настолько велико, что расстояния от (*an*–*k*/2)2 до соседних квадратов станут больше, чем |*k*–*k*2/4|. Если *k*–*k*2/4 ≠ 0, с этого момента в последовательности не будет ни одного точного квадрата. Если же *k*–*k*2/4 = 0, то *k* = 4, и все *an*, начиная со второго, будут точными квадратами.

***Задача 5*.** *Дана последовательность длины n (n ≥ 2), состоящая из нулей и единиц. Несколько цифр, стоящих подряд (возможно, одна), образуют подпалиндром, если последовательность этих цифр одинаково читается от начала к концу и от конца к началу. Какое наименьшее количество подпалиндромов может быть в последовательности?*

Ответ. 2*n*–2. Решение. *Оценка*. Индукция по числу символов. При *n* = 2 палиндромов хотя бы два – каждый из символов. При *n* = 3 – хотя бы четыре: три символа и одна из конфигураций *aa* или *aba*. Пусть уже доказано, что при *n* = *k* (*k* ≥ 3) палиндромов не меньше, чем 2*k*–2. Добавим справа символ *a*. Он сам по себе палиндром, и если в последовательности, к которой мы его дописали, есть хотя бы одна буква *a*, то добавился ещё палиндром вида *ab…ba*; в противном случае та последовательность состояла из *k* букв *b*, и в ней было не менее, чем *k*+(*k*–1)+…+1 = *k*(*k*+1)/2 ≥ 2*k* палиндромов. Как видим, в обоих случаях палиндромов будет не меньше, чем 2(*k*+1)–2 = 2*k*. *Пример*. Рассмотрим последовательность 100110100110… (период 6). Примером для любого *k* служит её начальный отрезок длины *k*. В самом деле, в отрезке 10 два палиндрома, в отрезке 100 – четыре палиндрома, а далее перебором шести случаев нетрудно убедиться, что добавление каждого следующего знака увеличивает количество палиндромов ровно на два.

***Задача 6*.** *В остроугольном треугольнике ABC точка K – середина AC. На сторонах AB и BC как на основаниях внутрь треугольника построены равнобедренные треугольники ABM и BCN так, что ∠AMB = ∠AKB, AM = BM и ∠BNC = ∠BKC, CN = BN. Докажите, что окружность, описанная около треугольника MNK, касается стороны AC.*

Решение. На медиане *BK* отложим отрезок *BT*, равный *AK* = *CK*. Пусть Ω – окружность, проходящая через *T* и касающаяся прямой *AC* в точке *K* (такая окружность единственна). Треугольники *MKA* и *MTB* равны по двум сторонам и углу между ними (∠*MAK* = ∠*MBK* как вписанные, опирающиеся на одну дугу). Так как треугольник *ABC* – остроугольный, точка *T* лежит на отрезке *BK*. Отсюда

∠*MKC* = 180°–∠*MKA* = 180°–∠*MTB* = ∠*MTK*.

Полученное равенство ∠*MKC* = ∠*MTK* означает, что окружность (*MTK*) касается *AC* в точке *K*, и, следовательно, совпадает с Ω. Аналогично доказываем, что окружность (*NTK*) совпадает с Ω.

***Задача 7*.** *Пусть n = 100000. Неотрицательные числа a1, a2, …, an, b1, b2, …, bn, c1, c2, …, cn таковы, что a1+…+an = b1+…+bn = c1+…+cn = 1 и все числа вида  не превосходят 1/n. Найдите наибольшее возможное значение суммы .*

Ответ. 3/106. Решение. *Оценка*. По неравенству о средних для *ai*, *ai*, *bi*, *bi*, *bi* имеем:    (\*). Из (\*) следует, что ** . *Пример*. Все *ai*, *bi* и *ci* при *i* ≤ 10 равны 1/10, а при *i* > 10 равны 0.

***Задача 8*.** *Дано натуральное число n. Двое играют в такую игру. Изначально на столе лежит 2n+1 рублёвых монет, а на доске написано число a = 1. Игроки ходят по очереди. Каждым ходом игрок либо не меняет, либо увеличивает на 2 число a, после чего забирает a монет со стола. Игра заканчивается, когда на столе остаётся меньше, чем a монет; выигрывает тот, у кого в этот момент монет больше, а если монет у игроков поровну, игра заканчивается вничью. Каким будет результат игры при правильной игре обоих игроков?*

Решение. Обозначим игроков *A* и *B*, *A* ходит первым. Сделаем сначала общее замечание. Пусть игроки к концу игры брали по очереди *a*1 ≤ … ≤ *an* монет. Если *n* чётно, то последним брал *B*, и разность количеств монет *A* и *B* равна
(*a*1–*a*2)+…+(*an*–1–*an*) ≤ 0, то есть *A* не выиграл. Если же *n* нечётно, то эта же разность равна *a*1+(*a*3–*a*2)+…+(*an*–*an*–1) ≥ *a*1 > 0, то есть *A* выиграл. Итак, *A* выигрывает ровно тогда, когда он делает последний ход.

Предположим, что у *B* есть непроигрышная стратегия (т.е. стратегия, действуя по которой, *B* гарантированно не проиграет). Тогда, если *B* будет действовать по этой стратегии, то общее количество ходов к концу игры будет чётным, то есть и количество взятых монет будет чётным; значит, в конце игры останется хотя бы одна невзятая монета. Пусть тогда *A* возьмёт одну монету, добавит мысленно одну виртуальную монету в кучу, а дальше будет действовать по упомянутой стратегии для новой кучи из 2*n*+1 монеты. Действуя по этой стратегии, он всегда сможет сделать ход (то есть ему не придётся брать виртуальную монету), ибо к концу игры хотя бы одна монета останется. Значит, действуя так, *A* выиграет. Полученное противоречие показывает, что непроигрышной стратегии у *B* нет; так как игра конечна, это означает, что у *A* есть выигрышная стратегия.