**Задачи Всероссийской олимпиады школьников по математике**

**Школьный этап 2014-2015уч.г.**

1. ***класс***

**Максимальная оценка каждой задачи – 7 баллов**

**10.1.** Если число 100¹º записать в виде суммы десяток (10 +10 +10 +…), то сколько получится слагаемых?

Ответ. 10¹⁹

Решение:

100¹º = 10²º = 10∙10¹⁹. Значит, всего будет 10¹⁹ слагаемых.

**10.2.** Вася задумал два числа. Их сумма равна их произведению и равна их частному. Какие числа задумал Вася?

Решение:

Обозначим числа х и у. Тогда по условию задачи х + у = ху = х: у.

Из уравнения ху = х: у следует, что либо х=0 и уǂ0, либо у²= 1, а Х-любой.

При х=0 из уравнения х + у = ху следует, что у=0, противоречие. Из уравнения у²=1

получаем, что либо у=1, либо у=-1. При у =1 решений у уравнения х + у = ху нет, а при

у =-1 из уравнения х +у = ху получаем х =1/2.

Ответ. 1/2, -1.

**10.3.** Постройте график функции



Решение:

Функция определена прих≥0. Преобразуем ее к виду у = х +∣х - 1∣. При х ≥1 у = 2х – 1, при 0≤ х<1 у = 1.

Y

X

1

1

0



График показан на рисунке:

Y

**10.3.** В равнобедренном треугольнике ABC проведена медиана AM к боковой стороне. Найдите квадрат радиуса окружности, описанной около треугольника ABC, если радиусы окружностей, описанных около треугольников ABM и AMC, равны 36 и 18.  
  
**Решение:**  
1. AC/sinγ=2R1=36,AB/sinγ=2R2=72⇒AB/AC=2, где γ=∠AMC  
Обозначим AC=x⇒AC=CM=MB=x,AB=BC=2x.  
2. По формуле медианы, AM=0,5√8x²+2x²−4x² = x⋅√1,5.  
3. Известно, что SABM=SAMC=1/2SABC=1/2S.(т. к. АМ медиана).  
Используем формулу радиуса описанной окружности R=abc/4S.  
Для треугольника ABM: 36=x³√6/2S⇒x³/S=72/√6  
Для треугольника ABC: R=4x³/4S=x³/S=72/√6

R = 12√6  
R² =864.  
  
**Ответ.** 864.

**10.4.** При каком значении параметра a значение выражения x²₁+ x²₂ будет наименьшим, если x₁, x₂ — корни уравнения x²+ax+a–2=0?  
  
**Решение:**  
По т. Виета: x₁+x₂=−a, x₁⋅x₂=a−2⇒  
⇒x²₁+x²₂=(x₁+x₂)² - 2х₁х₂ =a²−2a+4=f(a).  
Нам надо найти amin для функции f(a), при котором уравнение x²+ax+a−2=0 имеет корни, т.е.   
D=a²−4a+8>0, но это верно при всех a∈R, поэтому просто ищем минимум f(a).  
f(a)=(a−1)²+3≥3⇒amin=1.

**10.5.** Сколько имеется четырехзначных натуральных чисел, которые делятся на 9 и не содержат в своей записи цифры 0?

Решение:

Т.к. в записи числа отсутствует цифра 0, то каждая из цифр от 1 до 9 встречается в записи числа на любом месте. Цифры от 1 до 9 включительно дают все возможные остатки от деления на 9. Если зафиксируем первые три цифры четырехзначного числа, тогда существует только один способ поставить цифру на четвертое место, чтобы число делилось на 9. Таким образом, решение задачи сводится к тому, чтобы узнать, сколько существует способов составления трехзначного числа из цифр 1,2,3,4,5,6,7,8,9.

n = 9∙9∙9 = 729.

Ответ. 729.