

# Вопросы и задания заочного тура олимпиады «Будущие исследователи – будущее науки» по математике

2011-2012 уч.год

Выполненное задание в формате **PDF** отправляется со страницы регистрации участника олимпиады [www.vniief.ru/merop/plan/mer1/](http://www.vniief.ru/merop/plan/mer1/) вместе с тезисами исследовательской работы (формат **DOC**), либо по электронной почте [kh.read@expd.vniief.ru](mailto:kh.read@expd.vniief.ru) до 1 декабря 2011г.

1. Решить уравнение

$$x^2 + |x + 3| + |3 - x| = 4,5|x| + 6.$$

2. Деревянную плитку размерами 73 x 19 обвели карандашом на листе бумаги. Найти центр полученного прямоугольника, пользуясь только карандашом и плиткой.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 12, \\ x + xy + y = 0 \end{cases}$$

4. На сторонах треугольника во внешнюю сторону построены три квадрата, площади которых равны 18, 20 и 26. Вершины любых двух соседних квадратов соединены отрезком так, что образуется треугольник: две стороны треугольника равны сторонам квадратов, а сам треугольник не имеет общих внутренних точек с квадратами. Получим три таких треугольника. Найти площадь шестиугольника, состоящего из четырёх треугольников и трёх квадратов.

5. Найти наименьшие натуральные числа  $a, b$  ( $b > 1$ ) такие, что  $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = b$ .

6. Тысяча точек являются вершинами выпуклого тысячеугольника, внутри которого отмечены 500 точек так, что никакие из 1500 точек не лежат на одной прямой. Многоугольник разрезают на треугольники, вершинами которых служат заданные 1500 точек. Сколько получится треугольников?

7. Внутри квадрата расположен вдвое меньший квадрат. Доказать, что второй квадрат покрывает центр первого.

8. Решить уравнение

$$2^{x^5} + 4^{x^4} + 256^4 = 3 \cdot 16^{x^2}.$$

## Вопросы и задания заочного тура олимпиады «Будущие исследователи – будущее науки» по математике

2011-2012 уч.год

9. Дана прямая  $p$  и точка  $C$  вне её. Пусть  $MCP$  – прямоугольный треугольник, вершина  $P$  которого лежит на прямой  $p$  (угол  $C$  – прямой). Пусть точка  $P$  движется по прямой  $p$ , а площадь треугольника  $MCP$  остаётся постоянной. Какую линию опишет точка  $M$ ?

10. Центр окружности имеет координаты, которые выражаются иррациональными числами. Доказать, что в эту окружность нельзя вписать треугольник, все вершины которого имеют рациональные координаты.

**Запасная задача:** Для каждого значения  $a$  решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_5 + x_2 = ax_1, \\ x_1 + x_3 = ax_2, \\ x_2 + x_4 = ax_3, \\ x_3 + x_5 = ax_4, \\ x_4 + x_1 = ax_5 \end{cases}$$