ШИФР 1108
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике Дата проведения 06.03.2016
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Марченко Артемий Максимович

Серия и номер паспорта

2	2	1	1

8	5	0	4	8	6

Дата рождения 16.04.1998 Класс 11

Школа № Лицей № 15 район Нижегородская обл. город Саров

Особые отметки (Заполняется представителем оргкомитета) о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады **обязан:**
- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады **запрещается:**
- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. *За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды* ***шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.***

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись (**другие записи на папке делать запрещено**).

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! *Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.*

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады

№ 11.1 1108

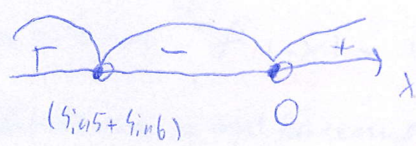
$\frac{x-\sin 5}{\sin 6} < \frac{\sin 5}{x-\sin 6}$

$\begin{cases} x \neq \sin 6 \\ x^2 - x(\sin 5+\sin 6) < 0 \quad (1) \end{cases}$

(1) $x(x-(\sin 5+\sin 6))<0$

$\pi < 5 < 6 < 2\pi \Rightarrow -1<\sin 5<0$; $-1<\sin 6<0$ (2)

Решим с помощью метода интервалов:



$\sin 5+\sin 6 < x < 0$

Из (2) следует, что $\sin 5+\sin 6 < \sin 6 < 0 \Rightarrow$ решение всей системы:

$x \in (\sin 5+\sin 6); \sin 6) \cup (\sin 6; 0)$

Ответ: $x \in (\sin 5+\sin 6); \sin 6) \cup (\sin 6; 0)$ 0б

№ 11.2

$\begin{cases} x^2-2x+y^2=0 \\ ax+y=ab \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-2x+a^2(b-x)^2=0 \\ y=a(b-x) \end{cases}$ поскольку $y=a(b-x)$ имеет решения при любых a, b, x, то чтобы были решения у системы, нужно чтобы у $x^2-2x+a^2(b-x)^2=0$ был хотя бы 1 корень при любом a.

$x^2(1+a^2)-2x(1+a^2b)+a^2b^2=0$

$\frac{D}{4} = (1+a^2b)^2 - a^2b^2(1+a^2) = 1+2a^2b-a^2b^2 = 1+a^2(2b-b^2) = 1+a^2(-1+(b-1)^2)$

Чтобы был хотя бы 1 корень нужно, чтобы $\frac{D}{4} \geq 0$

$1+a^2(-1+(b-1)^2) \geq 0$ при любом a^2

Если $(-1+(b-1)^2)<0$, то при очень больших a: $(-1+(b-1)^2)\cdot a^2 < -1$, а значит $\frac{D}{4}<0$

Значит $(-1+(b-1)^2) \geq 0$

При этом $a^2(-1+(b-1)^2) \geq 0 \Rightarrow \frac{D}{4} \geq 1 > 0 \Rightarrow$ корень есть

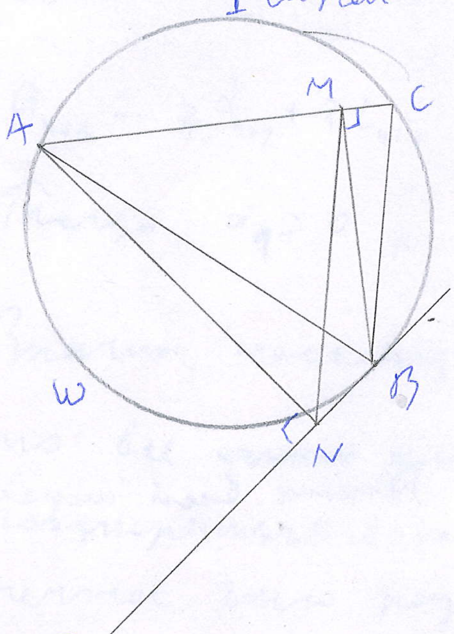
$(b-1)^2 \geq 1$

$\left[\begin{array}{l} b-1 \geq 1 \\ b-1 \leq -1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} b \geq 2 \\ b \leq 0 \end{array}\right. \quad b \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$

Ответ: $b \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$. 0б

№11.3.

I случай



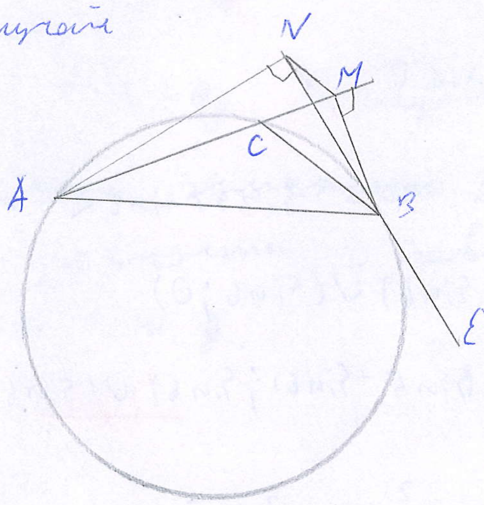
Дано: $BM \perp AC$

$AN \perp BN$

BN – касательная к ω

Доказать: $NM \parallel BC$

II случай



Решение:

Пусть $\angle ABN = \alpha$

Тогда $\angle MCB = \alpha$, т.к.

I случай

$\angle ABN = \frac{1}{2} \smile AB = \angle ACB = \angle MCB$

II случай

$\angle ABN = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - (\frac{1}{2} \overset{\text{большей}}{\smile AB}) = 180 - \angle ACB = \angle MCB$

Поскольку $\angle AMB = \angle ANB = 90^\circ$, то вокруг точек A, B, M, N можно описать окружность ω_2

$\angle AMN = \angle ABN = \alpha$, т.к. они опираются на $\smile AN$ в ω_2

I случай

$\left.\begin{array}{l} \angle AMN = \angle MCB \\ \angle AMN \text{ и } \angle MCB \text{ – соответственные} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow NM \parallel BC$ ч.т.д.

I случай

$\left.\begin{array}{l} \angle AMN = \angle MCB \\ \angle AMN \text{ и } \angle MCB \text{ – накрестлежащие} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow NM \parallel BC$ ч.т.д. 2б

№ 11.4

$$y=\frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}$$

$f(x)=y$

$$f(-x)=\frac{\sqrt{(-x)^2+1}-x-1}{\sqrt{(-x)^2+1}-x+1}=\frac{(\sqrt{x^2+1}-x-1)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}-x+1)(\sqrt{x^2+1}+x)}=$$

$(\sqrt{x^2+1}+x\neq 0$, т. к. $|\sqrt{x^2+1}|>|\sqrt{x^2}|=|x|)$

$$=\frac{x^2+1-(x+1)\sqrt{x^2+1}+x\sqrt{x^2+1}-x^2-x}{x^2+1-x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}+x\sqrt{x^2+1}-x^2+x}=\frac{1-x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}+x+1}=-f(x)$$

Значит $f(-x)$ – нечетная

Область определения: $\begin{cases} x^2+1\geq 0 & \text{– верно при } x\in R \\ \sqrt{x^2+1}+x+1\neq 0 \end{cases}$

$\sqrt{x^2+1}+x+1\neq 0$ При $x\geq 0$ $\sqrt{x^2+1}+x\geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}+x+1\geq 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}+x+1\neq 0$

При $x<0$ $|\sqrt{x^2+1}|>|x| \Rightarrow \sqrt{x^2+1}+x>0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}+x+1>1 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}+x+1\neq 0$

Значит $\sqrt{x^2+1}+x+1\neq 0$ – верно при $x\in R$

Значит область определения x – любое.

Множество значений: рассмотрим $x\geq 0$

$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x^2+1} \text{ – растёт} \\ x \text{ – растёт}\end{array}\right| \Rightarrow \sqrt{x^2+1}+x+1$ – растёт $\Rightarrow$ (поскольку $\sqrt{x^2+1}+x+1>0$) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}$ – убывает $\Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+x+1}$ – растёт $\Rightarrow 1-\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+x+1}$ растёт, а $y=1-\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+x+1}$

Значит максимальное $y=\lim\limits_{x\to\infty} 1-\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+x+1}=1$

минимальное $y=f(0)=0$ $\Rightarrow y\in[0;1)$

Поскольку функция нечётна, то область значений симметрично относительно 0.

$y \in (-1; 1)$

Ответ: а) y – нечётна; б) x – любое; $y \in (-1; 1)$. 18б

№11.5.

Поскольку нас не интересуют точные значения каких-либо a_n, а интересует только дробная часть этих чисел, то мы можем безболезненно отнимать и прибавлять по целому числу, т.к. целая часть предыдущих чисел не влияет на дробную часть последующих.
(если d – целая часть, а c – дробная, то

$$a_{n+2} = 3d_{n+1} + 3c_{n+1} - 2d_n - 2c_n = \underbrace{(3d_{n+1} - 2d_n)}_{\text{целое}} + \underbrace{(3c_{n+1} - 2c_n)}_{\text{может быть дробным}})$$

Тогда $a_1 = 0$; $a_2 = \frac{1}{9}$; $a_3 = \frac{1}{3}$; $a_4 = \frac{7}{9}$; $a_5 = \frac{6}{9}$; $a_6 = \frac{4}{9}$; $a_7 = 0$; $a_8 = \frac{1}{9}$

Значит, поскольку $a_1 = a_7$ и $a_2 = a_8$ и глубина рекурсии 2, то все ~~этих~~ дробные части замкнулись в цикл, т.е. будут повторяться с шагом 6, а значит 0 повторится бесконечное число раз ~~[illegible]~~ ч.т.д.

16б