ШИФР 1106
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по МАТЕМАТИКЕ Дата проведения ~~06.03.1998~~ 06.03.2016
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника МАРЕСЕВ АЛЕКСАНДР НИКОЛАЕВИЧ

Серия и номер паспорта | 2 | 2 | 1 | 1 | | 8 | 5 | 0 | 3 | 0 | 2 |

Дата рождения 01.03.1998 Класс 11

Школа № 15 район город САРОВ

Особые отметки **(Заполняется представителем оргкомитета)** о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады **обязан**:
- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады **запрещается**:
- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись (**другие записи на папке делать запрещено**).

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! *Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.*

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

Мареев
(подпись участника олимпиады

№1. 110б

$\frac{x-\sin 5}{\sin 6} < \frac{\sin 5}{x-\sin 6}$

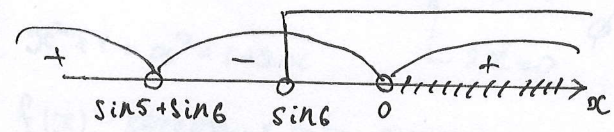
$0 > \sin 6 > \sin 5 \Rightarrow x-\sin 5 > \frac{\sin 5\cdot\sin 6}{x-\sin 6}$

Если $x-\sin 6>0$, то

$\begin{cases}(x-\sin 5)(x-\sin 6)>\sin 5\cdot\sin 6\\ x>\sin 6\end{cases}$

$\begin{cases}x^2-x(\sin 5+\sin 6)+\sin 5\cdot\sin 6>\sin 5\cdot\sin 6\\ x>\sin 6\end{cases}$

$\begin{cases}x(x-(\sin 5+\sin 6))>0\\ x>\sin 6\end{cases}$

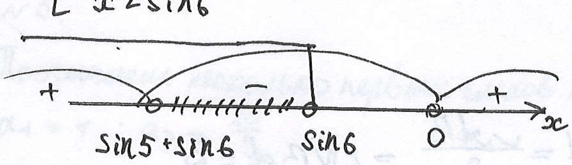


$(0;+\infty)$

Если $x-\sin 6<0$, то

$\begin{cases}(x-\sin 5)(x-\sin 6)<\sin 5\cdot\sin 6\\ x<\sin 6\end{cases}$

$\begin{cases}x(x-(\sin 5+\sin 6))<0\\ x<\sin 6\end{cases}$



$(\sin 5+\sin 6;\sin 6)$

Ответ: $(\sin 5+\sin 6;\sin 6)\cup(0;+\infty)$. 20б

№2.

$\begin{cases}x^2-2x+y^2=0\\ ax+y=ab\end{cases}$ $\quad\begin{cases}y=\cancel{a(x-b)}\ a(b-x)\\ x^2-2x+a^2(b-x)^2=0\ (1)\end{cases}$

(1) $x^2-2x+a^2b^2+a^2x^2-2a^2bx=0$

$x^2(a^2+1)-2x(1+a^2b)+a^2b^2=0$

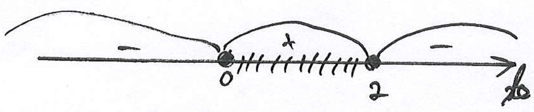
$\frac{D}{4}=(1+a^2b)^2-a^2b^2(a^2+1)=1+a^4b^2+2a^2b-a^4b^2-a^2b^2=a^2(2b-b^2)+1$

Чтобы уравнение имело решения, нужно чтобы $a^2(2b-b^2)+1\geq 0$ ~~было~~ было верным

$a^2(2b-b^2)+1 \geqslant 0$

$(a^2(2b-b^2) \geqslant -1)$ – неравенство выполняется при любых $a \Leftrightarrow 2b-b^2 \geqslant 0$

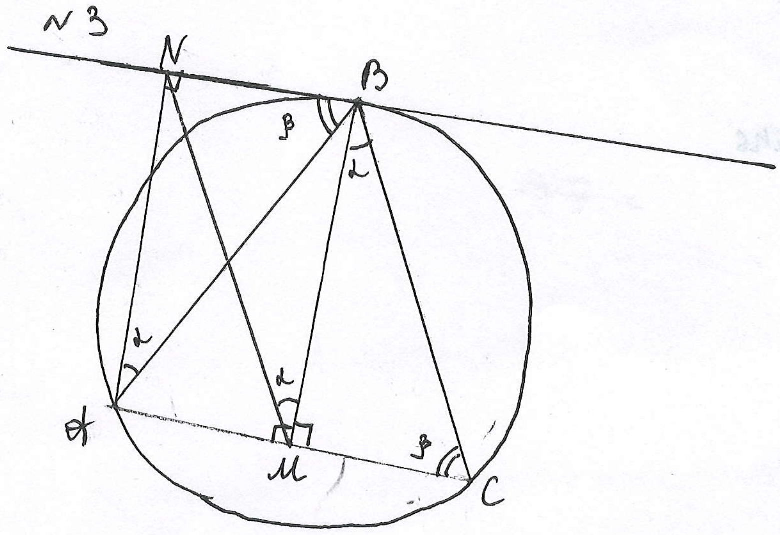
$b(2-b) \geqslant 0$



20б

Ответ: $[0;2]$

№3



Д-во:

1) $\angle ANB = \angle BMA = 90^\circ$ лежат на общей прямой AB | $\Rightarrow$ вокруг $ANBM$ можно описать окружность $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle NAB = \angle NMB = \alpha$ (опираются на одну дугу)

2) NB – касательная, AB – хорда | $\Rightarrow \smile AB = 2\angle NBA$

3) $\angle BCA$ – вписанный и опирается на $\smile AB \Rightarrow \angle BCA = \frac{\smile AB}{2} = \angle NBA = \beta$

4) $\triangle NAB$: $\alpha+\beta+90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha+\beta = 90^\circ$

5) $\triangle MBC$: $90^\circ+\beta+\angle MBC = 180^\circ \Rightarrow \beta+\angle MBC = 90^\circ$ | $\Rightarrow \angle MBC = \alpha = \angle NMB$

6) NM и BC – прямые, BM – секущая, $\angle NMB = \angle MBC$ и накрест лежащие | $\Rightarrow MN \parallel BC$, ч.т.д.

20б

№4.

а)
$$y=\frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}=\frac{(\sqrt{x^2+1}+x-1)(\sqrt{x^2+1}-x-1)}{x^2+1-x^2-1-2x}=\frac{(\sqrt{x^2+1}+x-1)(\sqrt{x^2+1}-x-1)}{-2x}=f(x)$$

$$g(-x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-x-1}{\sqrt{x^2+1}-x+1}=\frac{(\sqrt{x^2+1}-x-1)(\sqrt{x^2+1}+x-1)}{x^2+1-x^2-1+2x}=\frac{(\sqrt{x^2+1}+x-1)(\sqrt{x^2+1}-x-1)}{2x}=-f(x)$$

$$\left.\begin{matrix} y(x)=f(x)\\ y(-x)=-f(x)\end{matrix}\right| \Rightarrow y(x)\text{ – нечётная функция}$$

б) $\sqrt{x^2+1}+x+1\neq 0$

$\sqrt{x^2+1}\neq -x-1$

$$\begin{cases}-x-1>0\\ x^2+1=x^2+1+2x\end{cases}\quad \begin{cases}x<-1\\ 2x=0\end{cases}\quad \varnothing \Rightarrow \text{Область определения: } R.$$

$f(x)$ – нечётная $\Rightarrow$ функция ~~сим~~ симметрична относит. начала координат

Функция непрерывна и на отрезке $[0;+\infty)$ стремится ~~ке~~ к единице

$\Downarrow$

Область значений: $(-1;1)$

Ответ: $y(x)$ – нечётная; Область определения: $(-\infty;+\infty)$; Область значений: $(-1;1)$.

18б

№5.

Посчитаем несколько первых членов последовательности:

$a_1=1$; $a_2=\frac{10}{9}$

$a_3=\frac{30}{9}-\frac{18}{9}=\frac{12}{9}$ (остаток от деления на 9 равен $\overset{3}{\cancel{4}}$)

$a_4=\frac{12\cdot 3}{9}-\frac{20}{9}=\frac{16}{9}$ (ост. 7)

$a_5=\frac{3\cdot 16}{9}-\frac{2\cdot 12}{9}=\frac{12\cdot 2}{9}$ (ост. 6) ($3\cdot 7-\cancel{4\cdot 2}\ 3\cdot 2=15$; ост. от деления на 9 – 6)

$a_6=\frac{3\cdot 2\cdot 12}{9}-\frac{2\cdot 16}{9}=\frac{2\cdot 20}{9}$ (ост. 4) ($3\cdot 6-7\cdot 2=4$)

$a_7=\frac{3\cdot 2\cdot 20}{9}-\frac{12\cdot 2\cdot 2}{9}=\frac{3\cdot 2\cdot 12}{9}$ (ост. 0) ($3\cdot 4-6\cdot 2=0$)

~~Чи~~ Число a_7 – целое. Исследуем на остатки числа a_3-a_7. Видим, что от них зависят остатки следующих чисел. Найдём остатки чисел a_8-a_{13}:

~~$a_8: 3\cdot 0-2\cdot 4=-8$~~ $a_8=\frac{\cancel{24}}{9}$ (ост. $\overset{1}{\cancel{8}}$)

$a_9: 3\cdot \overset{1}{\cancel{5}}-2\cdot 0=\overset{3}{\cancel{15}}$ (ост. $\overset{3}{\cancel{6}}$)

$a_{10}: 3\cdot \overset{3}{\cancel{6}}-\overset{1}{\cancel{5}}\cdot 2=\cancel{7}$ (ост. $\cancel{7}$)

$a_{11}=3\cdot \cancel{7}-2\cdot \cancel{3}=15$ (ост. 6)

$a_{12}=3\cdot \cancel{6}-2\cdot \cancel{7}=\cancel{-7}4$ (ост. 4)

$a_{13}=3\cdot 4-2\cdot 6=0$ (ост. 0)

Мы видим, что число a_{13} будет целым. Также заметно, что остатки чисел $a_2 - a_7$ и $a_8 - a_{13}$ - одинаковы. Из этого можно сделать вывод, что каждое шестое число в последовательности, начиная с a_7, будет целым $\Rightarrow a_n$ принимает целые значения для бесконечного множества номеров n.

18б