ШИФР 1107
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по МАТЕМАТИКЕ Дата проведения 06.03.16
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Мухина Анастасия Сергеевна

Серия и номер паспорта | 2 | 2 | 1 | 1 | | 7 | 9 | 9 | 7 | 7 | 8 |

Дата рождения 27.10.1997 Класс 11

Школа № 15 район Нижегородская обл город Саров

Особые отметки (Заполняется представителем оргкомитета) о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады **обязан**:
- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады **запрещается**:
- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись (**другие записи на папке делать запрещено**).

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

***Внимание!** Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.*

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)

11.1.

$$\frac{x-\sin 5}{\sin 6} < \frac{\sin 5}{x-\sin 6}$$

$$\frac{x-\sin 5}{\sin 6} - \frac{\sin 5}{x-\sin 6} < 0$$

$$\frac{(x-\sin 5)(x-\sin 6)-\sin 5\cdot\sin 6}{\sin 6(x-\sin 6)} < 0$$

$$\frac{x^2-\sin 6\cdot x - x\sin 5+\sin 5\cdot\sin 6-\sin 5\cdot\sin 6}{\sin 6(x-\sin 6)} < 0$$

Сократим на $\sin 6$, $\sin 6 \vee 0$

$\pi < 6 < 2\pi \Rightarrow$ $\sin 6 < 0$

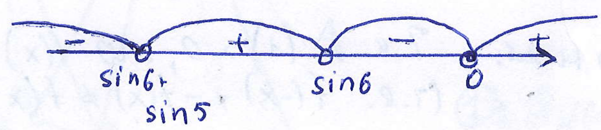
$$\frac{x(x-(\sin 6+\sin 5))}{x-\sin 6} > 0$$

$\sin 6 \vee \sin 6+\sin 5$

$0 \vee \sin 5$

$0 > \sin 5 \Rightarrow \sin 6 > \sin 6 + \sin 5$

$\sin 5 < 0$



Ответ: $\sin 6+\sin 5 < x < \sin 6$

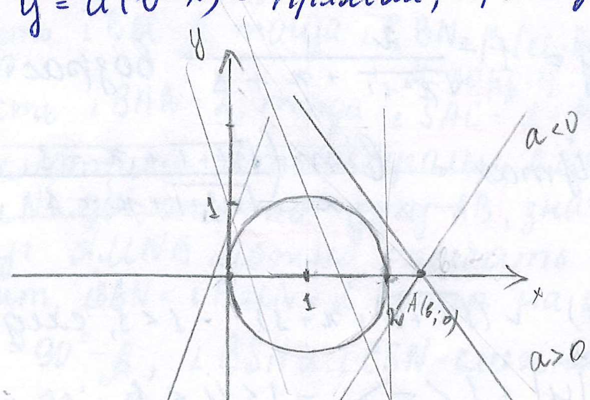
$x > 0$

20б

11.2.

$\begin{cases} x^2-2x+y^2=0 \\ ax+y=ab \end{cases}$ $\begin{cases} (x-1)^2+y^2=1 \\ ax+y=ab \end{cases}$ – это окруж. с $r=1$, центр. $O(1;0)$

$\begin{cases} (x-1)^2+y^2=1 \\ y=a(b-x) \end{cases}$ – прямая, проходящая через точку $(b;0)$. Она пересекает окружность, если точка $(b;0)$ лежит внутри окружности, т.е. $b\in[0;2]$



Ответ

19б

1107

$y = ab - ax$

$y = a(b-x)$

$y=0$ при $x=b$, a - любое.

Если $b<0$ и $b>2$, то найдётся такое a, ~~при~~ которое не будет ~~иметь~~ решением

11.4.

$$y = \frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}$$

а) ОДЗ $\begin{cases} x^2+1 \geq 0 \\ \sqrt{x^2+1}+x+1 \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 \geq -1 \\ \sqrt{x^2+1}+x+1 \neq 0 \end{cases}$ выполняется при $\forall$ значен. x,

$$f(-x) = \frac{\sqrt{(-x)^2+1}-x-1}{\sqrt{(-x)^2+1}-x+1}$$

?

$f(-x) \neq f(x)$

Значит, данная функция нечётная. Т.к. $f(1) > 0$, то $f(x) \neq 0$ (т.е. $f(-x) \neq -f(x) \neq f(x)$)

б) При $x \geq 0$: 1) целая часть $\frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+x+1}$

Т.к. $\sqrt{x^2+1}\uparrow$, $x\uparrow$, следовательно $(\sqrt{x^2+1}+x+1)\uparrow$ $(\sqrt{x^2+1}+x+1 \neq 0)$, значит,

$\sqrt{x^2+1}+x+1 > 0$

$\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+x+1}$ убывает, а ~~$y =$~~ $y = 1 - \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+x+1}$ возрастает

Т.к. y постоянно растёт, то ~~$y_{max} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}\right) = 1$~~.

$\lim\limits_{x\to\infty} y = \lim\left(1 - \frac{2}{\sqrt{x^2+1}+x+1}\right) = 1$.

Значит, $y(x) < 1$ $(\sqrt{x^2+1}+x-1) \vee (\sqrt{x^2+1}+x+1)$ $-1<1$, след-но,

$(\sqrt{x^2+1}+x-1) < (\sqrt{x^2+1}+x+1)$, т.е. $|y| < 1 \Leftrightarrow -1 < y < 1$

Ответ: а) ОДЗ: x - любое, $f(x)$ - нечетн.

б) ~~$y_{max} = 1$.~~ $-1 < y < 1$

10б

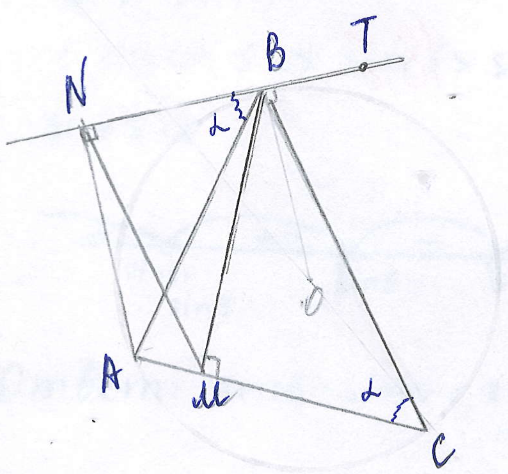
Дана формула $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{10}{9}$

Целые части не влияют на то, что будет у след. числа в дробной части. След-но, $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{9}$, $a_3 = \ldots$, $\ldots$, $a_7 = 0$, $a_8 = \frac{1}{9}$

Причем, ~~известно~~, $a = -\frac{5}{9}$ будет равным $\frac{4}{9}$ (т.к. $+1$).

Значит, образуется цикл, то есть повторение произойдет ∞ число раз.

11.3.



Дано: $\triangle ABC$ вписан в окружн., $r = \omega$

$BM \perp AC$, NB - касат. к окружн.,

B - точка касания, $AN \perp NB$

Д-ть: $MN \parallel BC$.

① 1. Пусть $\angle BAC = \beta$, $\angle ACB = \alpha$

$\angle NBA = \angle BCA = \alpha$

$\angle CBT = \angle BAC = \beta$ (по свойству касат. и хорды проведён. к точке касания)

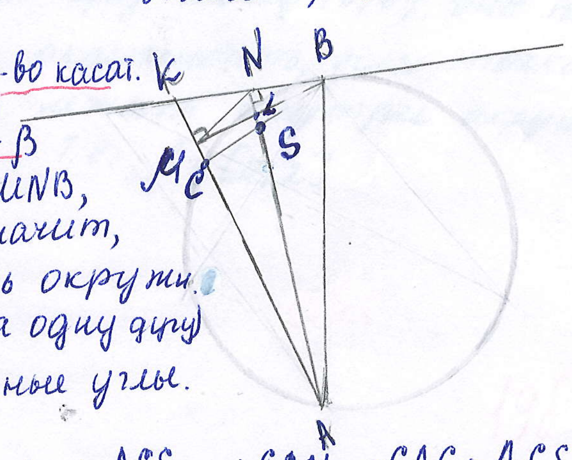
2. Рассмотрим четырёхугольник $NAMB$. Т.к. $\angle ANB + \angle BMA = 180°$, то около четырёхугольника можно описать окружность. Значит, $\angle AMN = \angle NBA = \alpha$ т.к. опираются на одну дугу. Следоват., $\angle AMN$ и $\angle MCB$ соответ. углы при MN и BC, MC - секущ. Значит, $MN \parallel BC$.

② 1. ~~$\angle BAC = \angle CBT = \beta$, α~~

Пусть $\angle BAC = \beta$, тогда $\angle CBN = \beta$ (св-во касат. и хорды)

Пусть $\angle BAN = \alpha$, тогда $\angle SAC = \alpha - \beta$

Рассмотрим четырёхугольн. $AMNB$, $\angle M = \angle N = 90°$, опир. на дугу AB?, значит, вокруг $AMNB$ можно описать окружн. Значит, $\angle BAN = \angle BMN = \alpha$ (опир. на одну дугу)



$\angle BSN = 90° - \beta$, $\angle BSN$ и $\angle CSN$ - смежные углы.

$\angle NSC = 90° + \beta$

18б

2. $\angle CSN$ - внешний ~~внешний~~ для $\triangle ACS$, $\angle CSN = \angle CAS + \angle ACS$; $90° + \beta = \beta - \alpha + \angle AC$

$\angle ACS = 90° + \alpha$, тогда $\angle SCM = 180° - \angle ACS = 90° - \alpha$

3. $AC \cap BN = K$, тогда $\angle NMK = 90° - \alpha = \angle MCS$ (соотв. уг. при MN и BC, MC - секущ.), значит, $MN \parallel B$

11.5.

Дано: $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$,

$a_1 = 1$, $a_2 = \frac{10}{9}$

Д-ть: $a_n \in \mathbb{Z}$ для ∞ множества номеров n.

Заметим, что $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) =$
$= 4(a_n - a_{n-1}) = 8(a_{n-1} - a_{n-2}) = \dots = 2^n(a_2 - a_1) =$
$= \frac{1}{9} \cdot 2^n$.

Тогда $a_{n+2} = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{n+2} - a_{n-1}) =$
$= 1 + \frac{1}{9}(1 + 2 + \dots + 2^n) = 1 + \frac{1}{9}(2^{n+1} - 1)$

Выясним при каких значениях n $(2^{n+1} - 1)$ делится на 9:

при $n = 5$ $2^6 - 1 = 63 \vdots 9$

при $n = 11$ $2^{12} - 1 = 1024 \cdot 4 - 1 = 4095 \vdots 9$

Очевидно, при $n+1 = 6k$
$(2^{n+1} - 1) \vdots 9$

Таких значений n бесконечно много.

18 б