ШИФР 1101
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по МАТЕМАТИКЕ Дата проведения 6.03.16
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Шемякин Никита Андреевич

Серия и номер паспорта | 2 | 2 | 1 | 1 | | 8 | 5 | 1 | 4 | 2 | 0 |

Дата рождения 21.05.1998 Класс 11

Школа № 15 район ________ город Саров

Особые отметки **(Заполняется представителем оргкомитета)** о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады **обязан**:
- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады **запрещается**:
- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись (**другие записи на папке делать запрещено**).

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! *Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.*

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

____
(подпись участника олимпиады)

№11.1.

1101

1) $\frac{x-\sin 5}{\sin 6} < \frac{\sin 5}{x-\sin 6}$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > \sin 6 \\ (x-\sin 5)(x-\sin 6) < \sin 5 \cdot \sin 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x < \sin 6 \\ (x-\sin 5)(x-\sin 6) > \sin 5 \cdot \sin 6 \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > \sin 6 \\ x^2 - x(\sin 5+\sin 6) + \sin 5\cdot\sin 6 < \sin 5 \cdot \sin 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x < \sin 6 \\ x^2 - x(\sin 5+\sin 6) + \sin 5\cdot\sin 6 > \sin 5 \cdot \sin 6 \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > \sin 6 \\ x(x-(\sin 5+\sin 6)) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < \sin 6 \\ x(x-(\sin 5+\sin 6)) > 0 \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > \sin 6 \\ x \in (\sin 5+\sin 6\,;0) \end{cases} \\ \begin{cases} x < \sin 6 \\ x \in (-\infty;\sin 5+\sin 6)\cup(0;+\infty) \end{cases}\end{array}\right.$$

2) $\pi < 6 < 2\pi$

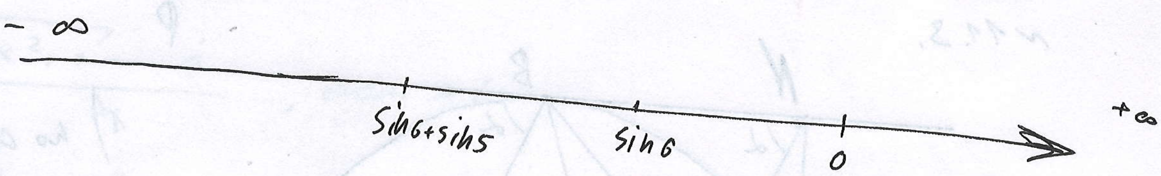
$\pi < 5 < 2\pi$

т.к. $3 < \pi < 4$

т.к. :

$-1 \le \sin 6 < 0$

$-1 \le \sin 5 < 0$



3) $\left[\begin{array}{l} x \in (\sin 6;0) \\ x \in (-\infty;\sin 5+\sin 6) \end{array}\right.$ $\quad x \in (-\infty;\sin 5+\sin 6)\cup(\sin 6;0).$

Ответ: $x \in (-\infty;\ \sin 5+\sin 6)\cup(\sin;0).$ Об.

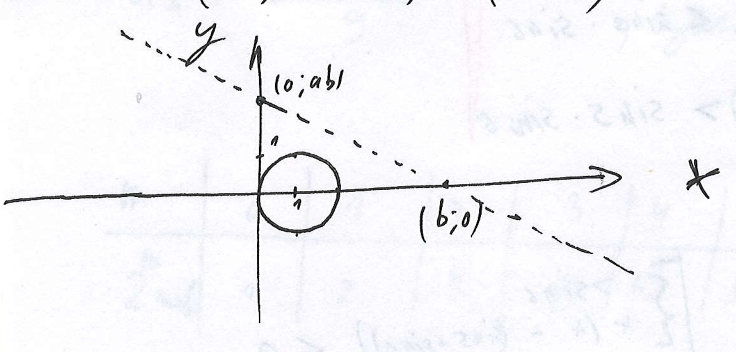
№11.2.

$$\begin{cases} x^2-2x+y^2=0 \\ ax+y=ab \end{cases} \quad \begin{cases} (x^2-2x+1)+y^2=1 \\ y=ab-ax \end{cases} \quad \begin{cases} (x-1)^2+y^2=1^2 \\ y=-a(x-b). \end{cases}$$

$(x-1)^2+y^2=1^2$ – окружность $r=1$, с центром $O(1;0)$.

$y=-a(x-b)$ – прямая, проходящая через точки: страница №1.

$(0; ab)$; $(b; 0)$



т.к. решение (пересечение) есть при любом a, то при любом положении $(0; ab)$ на оси OY (кроме случая $b=0$) прямая должна пересекать окружность.

Такое возможно только при положении $(b;0)$ внутри окружности.

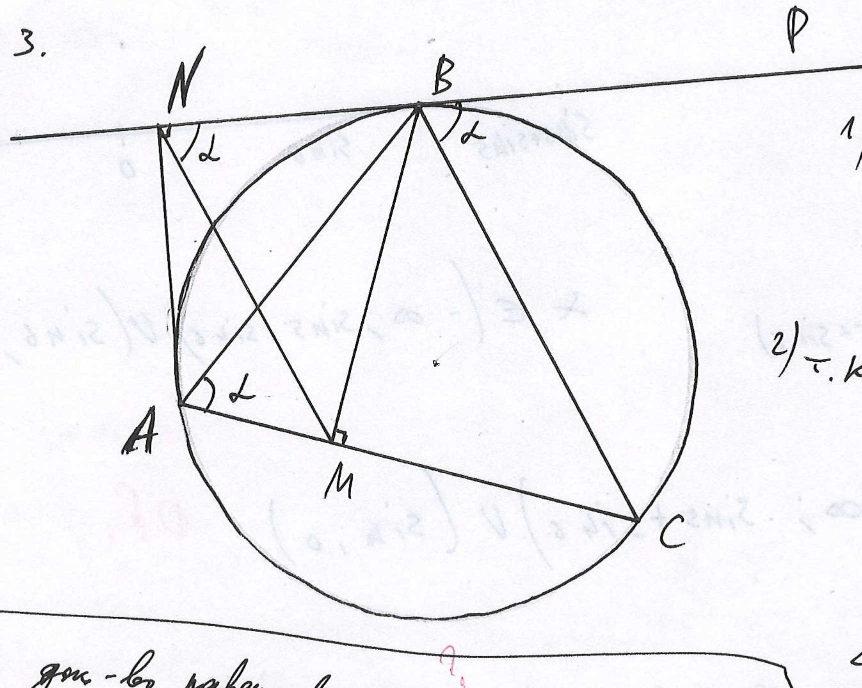
Или $b=0$.

$$\left[\begin{array}{l} b=0 \\ b\in[0;2] \end{array}\right. \qquad b\in[0;2]$$

Ответ: $b\in[0;2]$.

20б

№11.3.



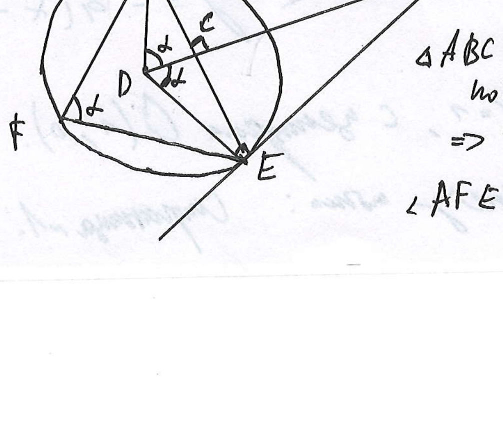
1) по свойству касательной: $\angle PBC = \angle BAC = \alpha$

2) т.к. $\angle ANB = 90°$, $\angle AMB = 90°$, $ANBM$ - вписанный $\Rightarrow$ $\angle MAB = \angle MNB = \alpha$ (опираются на $\cup BM$)

$\angle BNM = \angle PBP \Rightarrow$
$\Rightarrow NM \parallel BC$
ч.т.д.

18б

пункт 2 док-во равенства $\angle BBC$ и $\angle BAC$



(D-центр окружн.)

$\triangle ABC \sim \triangle ABD$ по прямому и острому углам

$\Rightarrow \angle BAC = \angle CAB = \alpha = \angle CDE$

$\angle AFE = \dfrac{\angle ADE}{2} = \alpha = \angle CAB$

Страница №2.

1) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1} + x - 1}{\sqrt{x^2+1} + x + 1}$

при $\sqrt{x^2+1} - (x+1) \neq 0$:

$$y = \frac{\left(\sqrt{x^2+1} + (x-1)\right)\left(\sqrt{x^2+1} - (x+1)\right)}{x^2+1 - (x+1)^2} = \frac{(x^2+1) - (x^2+1) + \left((x-1)-(x+1)\right)\sqrt{x^2+1}}{-2x}$$

$$= \frac{2 - 2\sqrt{x^2+1}}{-2x} = \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}$$

2) если:

$\sqrt{x^2+1} - (x+1) = 0$

$\sqrt{x^2+1} = x+1$

$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2+1 = x^2+2x+1 \end{cases}$ $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x = 0 \end{cases}$ $x = 0.$

3) если $x = 0$, то $y = \dfrac{1-1}{1+1} = 0.$

4) $y = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}, & \text{если } x \neq 0 \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$

$y(-x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{-x}$ $\quad -y(x) = -\dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}$

$y(-x) = -y(x) \Rightarrow$ функция нечётная.

б) 1) $\begin{cases} \sqrt{x^2+1} + x + 1 \neq 0 \\ x^2+1 \geq 0 \end{cases}$

$\sqrt{x^2+1} \neq -(x+1)$

$\sqrt{x^2+1} \neq -(x+1)$:

если $\sqrt{x^2+1} = -(x+1)$, то:

$\begin{cases} \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 = (x+1)^2 \\ -(x+1) \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+1 = x^2+1+2x \\ x \leq -1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = 0 \\ x \leq -1 \end{cases}$ $\varnothing \Rightarrow$ страница №3.

$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+1} \neq -(x+1)$ всегда

ОДЗ: $x \in (-\infty; +\infty)$.

г) Мн-во значений

$$y(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \quad (\text{при } x \neq 0)$$

$$y(x) = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - \frac{1}{x}$$

$$y'(x) = \frac{-\frac{2}{x^3}}{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$\sqrt{x^2+1} \geq 1$ при всех $x \Rightarrow \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) \geq 0$

$\Rightarrow y(x)$ ~~непр~~ - монотонно возрастает при всех $x \Rightarrow$

(в точке $x=0$ она не прерывается и $y'(x)=0$.) на всём промежутке

значит $y(x)$ принимает значения от $y(-\infty)$ до $y(+\infty)$.

$$y(-\infty) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{-x} = -1$$

$$y(\infty) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = 1.$$

т. е. y ~~принимает значения~~ от -1 до 1 (асимптотически) $y \in (-1; 1)$

Ответ: а) нечётная

б) $x \in (-\infty; +\infty)$

$y \in (-1; 1)$.

2 δ

Страница №4.

$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$

$a_1 = \frac{9}{9}$

$a_2 = \frac{10}{9}$

$a_3 = \frac{30-18}{9} = \frac{12}{9}$

$a_4 = \frac{36-20}{9} = \frac{16}{9}$

$a_5 = \frac{48-24}{9} = \frac{24}{9}$

можно заметить закономерность, что числитель, начиная с a_1, увеличивается на последовательные степени двойки, т.е.

$a_1 = \frac{8+2^0}{9}$

$a_2 = \frac{8+2^1}{9}$

$a_3 = \frac{8+2^2}{9}$

...

$a_x = \frac{8+2^{(x-1)}}{9}$

работает для нескольких первых

проверим для произвольного $x+2$, если работает для $x+1$; $x+0$:

$a_{x+2} = 3\cdot\left(\frac{8+2^x}{9}\right) - 2\cdot\frac{8+2^{x-1}}{9} =$

$= \frac{1}{9}\left(24+3\cdot2^x - 16 - 2^x\right) =$

$= \frac{1}{9}\left(8+2\cdot2^x\right) = \frac{8+2^{(x+1)}}{9}$

работает:

- выполняется для первых чисел (база индукции)
- шаг индукции доказан $\Rightarrow$ по мат. индукции:

$a_n = \frac{8+2^{(n-1)}}{9}$

$a_n = \frac{8+2^{(n-1)}}{9}$, целое при $2^{(n-1)} \equiv 1 \pmod{9}$

m	0	1	2	3	4	5	6	
$2^m \bmod 9$	1	2	4	8	7	5	1	...

цикл

остатки повторяются, в том числе 1. => бесконечно много чисел вида $2^{(n-1)}$, которые дают при делении на 9 остаток 1. =>

=> бесконечно много чисел $\frac{8+2^{(n-1)}}{9}$ – целые.

ч.т.д.

2б