ШИФР 1103

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по МАТЕМАТИКЕ Дата проведения 06.03.16

(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Веселова Евгения Романовна

Серия и номер паспорта | 2 | 2 | 1 | 2 | | 9 | 4 | 5 | 4 | 8 | 0 |

Дата рождения 30.07.1998 Класс 11

Школа № 15 район ______ город Саров

Особые отметки (**Заполняется представителем оргкомитета**) о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады **обязан**:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады **запрещается**:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись (**другие записи на папке делать запрещено**).

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! *Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.*

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)

11.1. $\frac{x-\sin 5}{\sin 6} < \frac{\sin 5}{x-\sin 6}$ 1103

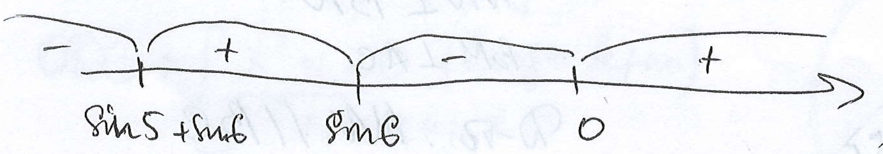
$$\frac{x^2 - x\sin 5 - x\sin 6 + \sin 5\cdot\sin 6 - \sin 5\cdot\sin 6}{\sin 6\,(x-\sin 6)} < 0.$$

$$\frac{x\,(x-\sin 5-\sin 6)}{\sin 6\,(x-\sin 6)} < 0$$

$1{,}5\pi < 6 < 2\pi$, $1{,}5\pi < 5 < 2\pi$

$\sin 6 < 0$, $\sin 5 < 0$

$$\frac{x\,(x-(\sin 5+\sin 6))}{x-\sin 6} > 0$$



$(\sin 5+\sin 6;\ \sin 6)\ \cup\ (0;+\infty)$

Ответ: $(\sin 5+\sin 6;\ \sin 6)\ \cup\ (0;+\infty)$ 20 5

11.2. $\begin{cases} x^2+y^2-2x=0 \\ ax+y=ab \end{cases}$

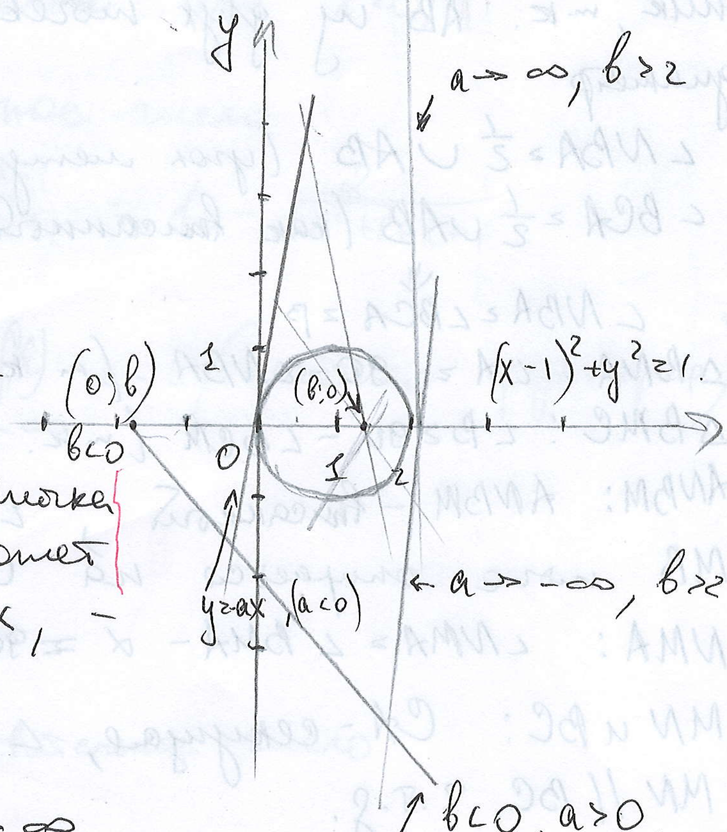
$\begin{cases} (x-1)^2+y^2=1 \\ y=a(-x+b) \end{cases}$

Если $a=0$, то $y=0$, $x\in[0;2]$ – корни

Если $a\to\infty$ ($-\infty$), то крайняя точка окружности, через которую может пройти прямая $y=ab-ax$, – это $(2;0)$

$0=ab-2a$, $b=2$.

Если $b>2$, то при $a\to\infty$ прямая не пересечёт окружность



$0<b<2$, тогда при $\forall a$ есть корень $(b;0)$, т.к.

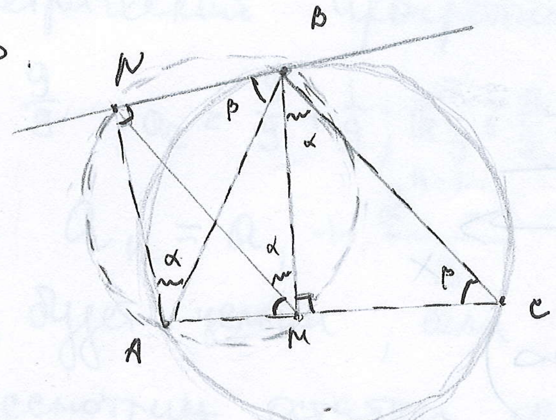
$0=ab-ax$, $x=b$, $y=0$.

$b=0$, $y=-ax$, при $\forall a$ есть корень $(0;0)$

$b<0$, при больших a $y=ab-ax$ пройдёт ниже окружности (при $a>0$) либо выше окружности (при $a<0$)

Ответ: $b\in[0;2]$ 19б

№3.



BN-касательная

$AN\perp BN$

$BM\perp AC$

Д-ть: $MN \parallel BC$

1) $\angle BNA=90^\circ$, $\angle BMA=90^\circ$ $\Rightarrow$ BMAN - вписанный четырёхугольник, т.к. AB из двух точек виден под одним углом, BA - диаметр

2). $\angle NBA=\frac{1}{2}\cup AB$ (угол между хордой и касательной)

$\angle BCA=\frac{1}{2}\cup AB$ (как вписанный угол)

$\angle NBA=\angle BCA=\beta$

3) ΔBNA: $\angle A = 90-\angle NBA$ (т.к. $\angle BNA=90^\circ$)

ΔBMC: $\angle B=90^\circ-\angle BCM$ (т.к. $\angle BMC=90^\circ$) $\Rightarrow$ $\angle NAB = \angle CBM=\alpha$, $\alpha+\beta=90^\circ$

4) ANBM: ANBM - вписанный, $\angle NAB$ опирается на $\cup NB$, $\angle NMB$ тоже опирается на $\cup NB$ $\Rightarrow$ $\angle NAB=\angle NMB=\alpha$

5) $\angle NMA$: $\angle NMA=\angle BMA-\alpha=90-\alpha=\beta=\angle BCA$.

6) MN и BC: CA - секущая, $\angle BCA=\angle NMA$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow MN \parallel BC$, ч.т.д. 20б

11.4. а) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1} = f(x)$

$f(-x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-x-1}{\sqrt{x^2+1}-x+1}$, если $f(-x) = -f(x)$, то $f(x)$ - нечётна

Для проверки сложим $f(-x)$ и $f(x)$:

$\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x-1}{\sqrt{x^2+1}-x+1} + \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1} = \dfrac{x^2+1+(x+1)\sqrt{x^2+1}-(x+1)\sqrt{x^2+1}-(x+1)^2+x^2+1+(x-1)\sqrt{x^2+1}-(x-1)\sqrt{x^2+1}-(x-1)^2}{(\sqrt{x^2+1}+x+1)(\sqrt{x^2+1}-x+1)} =$

$= \dfrac{2x^2+2-x^2-2x-1-x^2+2x-1}{(\sqrt{x^2+1}+x+1)(\sqrt{x^2+1}-x+1)} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x)$, функция нечётна

б) ОДЗ: $\begin{cases} x^2+1 \geq 0 \text{ (всегда верно)} \\ \sqrt{x^2+1}+x+1 \neq 0 \end{cases}$

$\sqrt{x^2+1}+x+1 \neq 0$

$\sqrt{x^2+1} \neq -x-1$, $x \leq -1$

$x^2+1 \neq x^2+2x+1$, $x \leq -1$

верно (такое возможно только при $x=0$)

$\Downarrow$

x - любое действительное число

Мн-во значений: $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1} = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}+x+1}$

$x \to \infty$, $f(x) \to 1$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ (нечётная функция)

$\Downarrow$

$f(x) \in (-1; 1)$

Ответ: а) нечётная

б) x - любое действительное число,

$f(x) \in (-1; 1)$

20б

11.5. $a_{n+2} = 3a_{n+1} + (-2)a_n$

$a_1 = 1 = \frac{9}{9}$; $a_2 = \frac{10}{9}$

$a_2 - a_1 = \frac{1}{9}$

$a_3 = 3a_2 - 2\left(a_2 - \frac{1}{9}\right) = a_2 + 2\cdot(a_2 - a_1) = a_2 + \frac{2}{9}$

$a_4 = 3a_3 - 2\left(a_3 - \frac{2}{9}\right) = a_3 + 2\cdot(a_3 - a_2) = a_3 + \frac{4}{9}$

Разность между n и $n+1$ членами растет в геометрической прогрессии

$a_1 = \frac{9}{9}$; $a_2 = \frac{9}{9} + \frac{1}{9}$; $a_3 = \frac{9}{9} + \frac{3}{9}$; $a_4 = \frac{9}{9} + \frac{7}{9}$; $a_5 = \frac{9}{9} + \frac{15}{9}$ ...

т.е. $a_n = a_1 + \frac{2^{n-1}-1}{9} = 1 + \frac{2^{n-1}-1}{9}$.

a_n будет целым, если $(2^{n-1}-1) \vdots 9$ $\quad 2^{n-1} \equiv 1 \pmod 9$

Рассмотрим остатки от деления 2^{n-1} на 9.

n	2^{n-1}	ост.
1	1	1
2	2	2
3	4	4
4	8	8
5	16	7
6	32	5
7	64	1
8	128	2
⋮	⋮	⋮

$\Rightarrow$ каждое шестое число, начиная с первого, будет целым

($a_7 = 8$ например).

$\Downarrow$

Таких целых чисел бесконечно много, ч.т.д.

20б