ШИФР 1112
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике Дата проведения 12.03.2017
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Семенов Никита Сергеевич

Серия и номер паспорта

Дата рождения Класс 11

Школа № Лицей 3 район город Саров

Особые отметки (Заполняется представителем оргкомитета) о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады **обязан**:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады **запрещается**:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись (**другие записи на папке делать запрещено**).

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы.

Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! *Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.*

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)

№ 11.1

1112

Дано: $a_n = (-1)^{1+2+\dots+n}$

Найти: $a_1 + a_2 + \dots + a_{2017}$

Решение:

1) $1+2+\dots+n$ – сумма n первых членов арифметической прогрессии с разностью 1 и первым членом 1.

Тогда $1+2+\dots+n = \frac{(1+n)n}{2}$

2) Рассмотрим следующие члены последовательности:

$k \in N$

$a_{4k+1} = (-1)^{\frac{(4k+1)(4k+2)}{2}} = (-1)^{(4k+1)(2k+1)} = -1$, т.к. $4k+1$ – нечетное, $2k+1$ – нечетное, $(4k+1)(2k+1)$ – нечетное

$a_{4k+2} = (-1)^{\frac{(4k+2)(4k+3)}{2}} = (-1)^{(2k+1)(4k+3)} = -1$ (аналогично)

$a_{4k+3} = (-1)^{\frac{(4k+3)(4k+4)}{2}} = (-1)^{2(k+1)(4k+3)} = 1$, т.к. $2(k+1)(4k+3)$ – четное

$a_{4k+4} = (-1)^{\frac{(4k+4)(4k+5)}{2}} = (-1)^{2(k+1)(4k+5)} = 1$ (аналогично)

Итак, $a_{4k+1} + a_{4k+2} + a_{4k+3} + a_{4k+4} = -1 - 1 + 1 + 1 = 0$

3) $a_1 + a_2 + \dots + a_{2017} = a_{4\cdot0+1} + a_{4\cdot0+2} + a_{4\cdot0+3} + a_{4\cdot0+4} + \dots + a_{4\cdot503+1} + a_{4\cdot503+2} + a_{4\cdot503+3} + a_{4\cdot503+4} + a_{504\cdot4+1} = a_{4\cdot504+1} = -1$.

Ответ: -1.

205

№ 11.2.

ОДЗ: $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}$ (область допустимых значений)

1) $\operatorname{arcsh} x + \operatorname{arcsh} y > \frac{\pi}{2}$.

$\operatorname{arcsh} y > \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsh} x$.

Из условия $\operatorname{arcsh} x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ получим: $\operatorname{arcsh} y > \arccos x$ (1).

2) Т.к. $\forall x, y \in R$ $\operatorname{arcsh} y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, а $\arccos x \in [0; \pi]$, причем $\operatorname{arcsh} y > \operatorname{arcsh} x$, то $\operatorname{arcsh} y > 0$, $\arccos x < \frac{\pi}{2}$

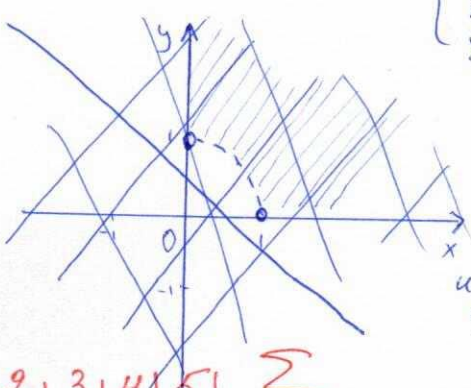
Тогда $y > 0$, $x > 0$

3) $\begin{cases} \operatorname{arcsh} y > \arccos x \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \operatorname{sh}(\operatorname{arcsh} y) > \operatorname{sh}(\arccos x) \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

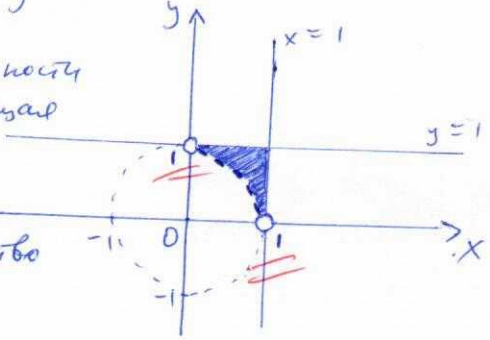
Т.к. $x > 0$, $y > 0$, то $\operatorname{sh}(\arccos x) > 0$.

Тогда $\operatorname{sh}(\arccos x) = +\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1-x^2}$

4) Итак, получим: $\begin{cases} y > \sqrt{1-x^2} \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 > 1 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ + ОДЗ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x^2 + y^2 > 1 \\ 0 < x \le 1 \\ 0 < y \le 1 \end{cases}$

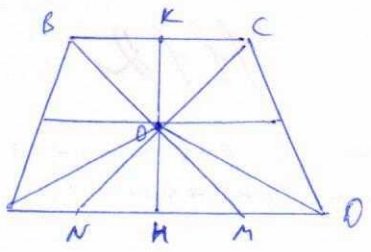


Четверть окружности $x^2+y^2=1$, лежащая в I четверти не входит в искомое множество точек.



1	2	3	4	5	Σ
20	17	20	18	13	88

+↑ 170



№ 11.3

Дано: трапеция ABCD (BC ∥ AD). Окружность с центром в т. O вписана в трапецию.
∠BOA = M, ∠COA = N.

Доказать, что $S_{AON} + S_{DOM} + 2S_{NOM} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

Доказательство:

1) Пусть r – радиус окружности, вписанной в трапецию.

2) Пусть т. K – точка касания окружности с трапецией ($K \in BC$), а т. H – точка касания окружности с трапецией ($H \in AD$). Т.к. OK и OH – радиусы к касательным BC и AD соответственно, то $OK \perp BC$, $OH \perp AD$. Причем, $OK = OH = r$.

3) $S_{AON} + S_{DOM} + 2S_{NOM} = S_{AON} + S_{NOM} + S_{DOM} + S_{NOM} = S_{AOD} + S_{NOM}$

4) Т.к. $KO \perp BC$, $OH \perp AD$, а $BC \parallel AD$, то $O \in KH$ (отрезки KO и OH лежат на одной прямой).

5) Рассмотрим $\triangle BOK$ и $\triangle MOH$:
1. $\angle MOH = \angle KOB$
2. $\angle BKO = \angle MHO = 90°$
3. $KO = OH = r$.

Значит, $\triangle BOK = \triangle MOH$ по стороне и двум прилежащим углам. Тогда $MO = BO$.

6) Рассмотрим $\triangle MON$ и $\triangle BOC$:
1. $\angle BOC = \angle MON$
2. $\angle OMN = \angle OBC$ как накрестлежащие углы при пересечении $BC \parallel AD$ секущей BM.
3. $BO = OM$.

Значит, $\triangle BOC = \triangle MON$ по стороне и 2 прилежащим углам. Тогда $S_{BOC} = S_{NOM}$

7) $S_{AOD} + S_{NOM} = S_{AOD} + S_{BOC} = \frac{1}{2} OH \cdot AD + \frac{1}{2} OK \cdot BC = \frac{1}{2} r(AD+BC)$

8) ~~Т.к. $O \in KH$, то~~ KH – высота трапеции, $KH = 2r$

$\frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} KH \cdot (AD+BC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r(AD+BC) = \frac{1}{2} r(AD+BC)$

9) Итак, $S_{AON} + S_{DOM} + 2S_{NOM} = \frac{1}{2} r(AD+BC) = \frac{1}{2} S_{ABCD}$, что и требовалось доказать.

208

№ 11.4

а) Пусть x, y – стороны прямоугольника. Тогда его площадь равна (xy), а периметр – $(2(x+y))$

$$xy = 2x + 2y$$

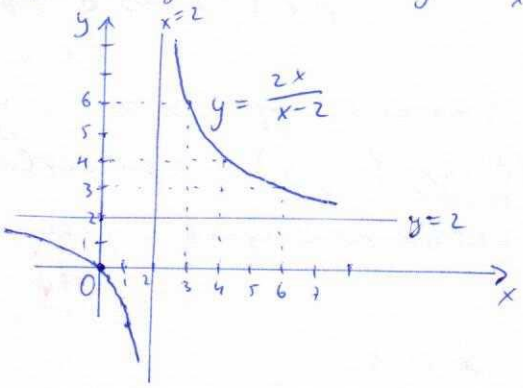
$$y(x-2) = 2x.$$

при $x = 2$ получим: $y \cdot 0 = 4$ – ∅

Значит, $x \neq 2$: $y = \frac{2x}{x-2}$ – гипербола

$x = 2$, $y = 2$ – ее асимптоты.

Найдем положительные целые x и y, удовлетворяющие условию $y = \frac{2x}{x-2}$:



Т.к. $y > 0$, то $\frac{2x}{x-2} > 0$

Т.к. и $x > 0$, то $x > 2$

x	3	4	5	6
y	6	4	$\frac{10}{3}$	3

При $x < 3$ $y < 0$ ∅

При $x > 6$ $y = 2 + r$, где $r < 1$, $r \to 0$. $(r \in \mathbb{R})$ при $x \to +\infty$

Значит, при $x > 6$ $y \notin \mathbb{Z}$.

Итак, пары $(3; 6)$, $(4; 4)$ и $(6; 3)$ – единственные целые положительные x и y, удовлетворяющие условию.

+↓95

Ответ: 3

б) Пусть x, y – катеты прямоугольного треугольника. Тогда $\sqrt{x^2+y^2}$ – его гипотенуза (по теореме Пифагора).

$S = \frac{1}{2}xy$ – площадь; $P = x + y + \sqrt{x^2+y^2}$ – периметр

$$S = P$$

$$\frac{1}{2}xy = x + y + \sqrt{x^2+y^2}$$

$$xy - 2x - 2y = 2\sqrt{x^2+y^2}$$ Возведем в квадрат обе части ур-ия.

$$x^2y^2 + 4x^2 + 4y^2 - 4x^2y - 4xy^2 + 8xy = 4x^2 + 4y^2$$

$$x^2y^2 + 8xy - 4xy(x+y) = 0$$

$$x^2y^2 + 4xy(2 - x - y) = 0.$$

Т.к. $x \neq 0$ и $y \neq 0$: $xy + 8 - 4x - 4y = 0$

$$y(x-4) = 4x - 8$$

При $x = 4$: $y \cdot 0 = 16 - 8$ ∅

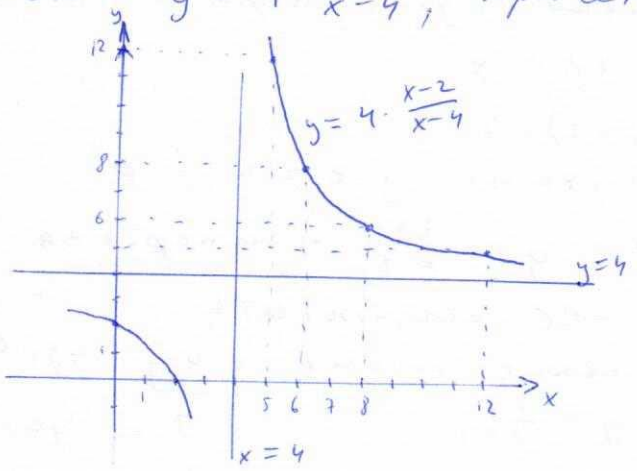
Значит, $x \neq 4$: $y = \frac{4x-8}{x-4}$ – гипербола

$x = 4$, $y = 4$ – ее асимптоты.

Т.к. $x > 0$, $y > 0$: $4\frac{x-2}{x-4} > 0$

$0 < x < 2$, $x > 4$.

Найдем целые положительные x и y, удовлетворяющие условию $y = 4\frac{x-2}{x-4}$, причем $x \in (0;2) \cup (4;+\infty)$



x	1	5	6	7	8	9	10	11	12
y	$\frac{4}{3}$	12	8	$\frac{20}{3}$	6	$\frac{28}{5}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{36}{7}$	5

~~при $x^2 - 4 < 0$~~

при $x \in (-\infty; 4]$ – $\varnothing$

при $x > 12$ $y = 4 + r$, где $r < 1$, $r \to 0$ при $x \to +\infty$ ($r \in \mathbb{R}$)

Значит, при $x > 12$ $y \notin \mathbb{Z}$.

Итак, пары $(5;12)$, $(6;8)$, $(8;6)$, $(12;5)$ – единственные целые положительные x, y, удовлетворяющие условию.

Ответ: 4. +↓ 95

№ 11.5.

1) Пусть $x^2 + bx + c$ – исходный квадратный трехчлен, x_1 и x_2 – его корни ($x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$), а x_3, x_4 – абсциссы точек пересечения параболы $y = x^2 + bx + c$ с прямой $y = 2017$.

~~г) Если из известных x_1, x_2, b и c можно однозначно выразить величины x_3 и x_4, то~~

2) Ордината вершины параболы $y_0 = c - \frac{b^2}{4}$. Значит, если существуют единственные b и c, такие, что x_1, x_2, x_3 и $x_4 \in \mathbb{Z}$, то y_0 определяется однозначно.

Выразим x_1, x_2, x_3 и x_4 через b и c:

3) По теореме Виета: $\text{I} \begin{cases} x_1 x_2 = c \\ x_1 + x_2 = -b \end{cases}$

Пересечение параболы и прямой $y = 2017$: $x^2 + bx + c = 2017$

$x^2 + bx + c - 2017 = 0$

$\text{II} \begin{cases} x_3 x_4 = c - 2017 \\ x_3 + x_4 = -b \end{cases}$

Найдем y_0.

4) I: ~~$x_2 = \frac{c}{x_1}$~~ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$

~~$x^2 + bx + c = 0$~~ x_1 и x_2 определяются через b и c однозначно.

5) II: $\begin{cases} x_3 x_4 = x_1 x_2 - 2017 = A \\ x_3 + x_4 = x_1 + x_2 = B \end{cases}$ $x_4 = \frac{A}{x_3}$

$x_3^2 - Bx_3 + A = 0$

$D = B^2 - 4A = (x_1 + x_2)^2 - 4(x_1 x_2 - 2017) =$

$= (x_1 - x_2)^2 + 4 \cdot 2017.$

Т.к. $x_3 \in \mathbb{Z}$, то $D = m^2$, где $m \in \mathbb{Z}$.

Тогда $m^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4 \cdot 2017$.

$(m + (x_1 - x_2))(m - (x_1 - x_2)) = 4 \cdot 2017$

$x_1 - x_2 = n$, $n \in \mathbb{Z}$

$(m+n)(m-n) = 4 \cdot 2017$.

$\begin{cases} m+n = 2 \\ m-n = 2 \cdot 2017 \end{cases}$ $(2018; -2016)$

$\begin{cases} m+n = 2 \cdot 2017 \\ m-n = 2 \end{cases}$ $(2018; 2016)$

Вспомнив, что $m \in \mathbb{Z}$, получим, что $m+n+m-n = 2m$ – чётное значит, $(m+n)$ и $(m-n)$ – одной чётности.

С этим условием составим системы. (слева)

Итак, $m = 2018$, $x_1 - x_2 = \pm 2016$. Пусть $x_1 > x_2$

Тогда $x_1 - x_2 = 2016$.

$x_1 = x_2 + 2016$

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{B \pm \sqrt{D}}{2} = \dfrac{x_1 + x_2 \pm 2018}{2} \\ x_4 = \dfrac{A}{x_3} = \dfrac{2(x_1 x_2 - 2017)}{x_1 + x_2 \pm 2018} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{2x_2 \pm 2018 + 2016}{2} \\ x_4 = \dfrac{2((x_2 + 2016)x_2 - 2017)}{2x_2 + 2016 \pm 2018} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = x_2 \mp 1 \\ x_3 = x_2 + 2017 \\ x_4 = \dfrac{A}{x_3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = x_2 \mp 1 \\ x_4 = \dfrac{x_2^2 + 2016x_2 - 2017}{x_2 \mp 1} = \dfrac{(x_2 \mp 1)(x_2 + 2017)}{x_2 \mp 1} = 2017 + x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = x_2 + 2017 \\ x_4 = \dfrac{(x_2 \mp 1)(x_2 + 2017)}{x_2 + 2017} = x_2 - 1 \end{cases}$$

Пусть $x_3 > x_4$. Тогда $x_3 = x_2 + 2017$, $x_4 = x_2 - 1$

6) $-B = x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 2x_2 + 2016$.

$C = x_1 x_2 = x_3 x_4 + 2017 = x_2^2 + 2016x_2$

$x_1 = \dfrac{C}{x_2} = x_2 + 2016$

7) Итак, $\begin{cases} x_1 = x_2 + 2016 \\ x_3 = x_2 + 2017 \\ x_4 = x_2 - 1 \\ B = -2x_2 - 2016 \\ C = x_2^2 + 2016x_2 \end{cases}$

$y_0 = C - \dfrac{B^2}{4} = x_2^2 + 2016x_2 - \dfrac{4(x_2 + 1008)^2}{4} = x_2^2 + 2016x_2 - (x_2 + 1008)^2 =$

$= -1008^2$ – определяется однозначно, независимо от x_1, x_2, x_3 и x_4.

Ответ: можно: $y_0 = -1008^2$

$\pm$ ↑ 135