ШИФР 1101
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по МАТЕМАТИКЕ Дата проведения 11.02.18
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника ДЕРЮГИН МАКСИМ СЕРГЕЕВИЧ

Серия и номер паспорта | 2 | 2 | 1 | 3 | | 1 | 2 | 1 | 9 | 8 | 5 |

Дата рождения ________ Класс 11 Б

Гимназия ~~Школа~~ № 2 район ________ город Саров

Особые отметки (Заполняется представителем оргкомитета)
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

Правила поведения
Участник очного тура олимпиады **обязан**:
- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады **запрещается**:
- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы
Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись (**другие записи на папке делать запрещено**).
На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).
Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы.
Нельзя делать исправления карандашом.
Внимание! *Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.*

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

____
(подпись участника олимпиады)

№ 11.1.

1101

$\log_x y + \log_y x > 2;$

$$\text{ОДЗ}: \begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ x\neq 1 \\ y\neq 1 \end{cases}$$

1	2	3	4	5	Σ
12	12	8	4	20	56

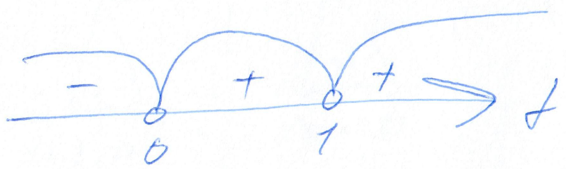
$\log_x y + \frac{1}{\log_x y} > 2$

$\log_x y = t;$

$t + \frac{1}{t} > 2$

$\frac{t^2-2t+1}{t} > 0$

$\frac{(t-1)^2}{t} > 0$



$\left[\begin{array}{l} 0<t<1 \\ t>1 \end{array}\right.$

1) $t>1:$

$\log_x y > 1$

$\log_x y > \log_x x$

а) $\begin{cases} 0<x<1 \\ y<x \end{cases}$

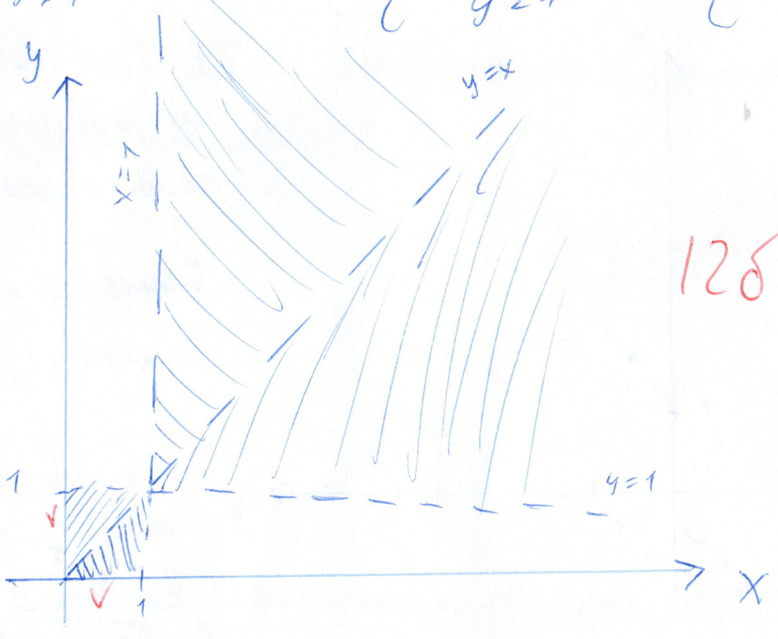
б) $\begin{cases} x>1 \\ y>x \end{cases}$

2) $0<t<1$

$0<\log_x y<1$

а) $\begin{cases} 0<x<1 \\ y>x \\ y<1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x>1 \\ 1<y<x \end{cases}$



12б

1

№ 11.5

$$\begin{cases} 3^x = \sqrt{y} & (1) \\ 2^{-y} = x^3 & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим (2) уравнение:

$2^{-y} > 0 \Rightarrow$ Л.Ч. $> 0 \Rightarrow$ П.Ч. $> 0 \Rightarrow \underline{x > 0}$

Рассмотрим (1) уравнение:

$x > 0 \Rightarrow 3^x > 1 \Rightarrow$ Л.Ч. $> 0 \Rightarrow$ П.Ч. $> 0 \Rightarrow \underline{y > 0}$

$$\begin{cases} 3^{2x} = y \\ \frac{1}{2^y} = x^3 & (2) \end{cases}$$

(2): $\boxed{1 = x^3 \cdot 2^y = x^3 \cdot 2^{3^{2x}}}$;

В урав. (1) Заметим, что $y = 3^{2x}$ – мон. возрастающая функция,

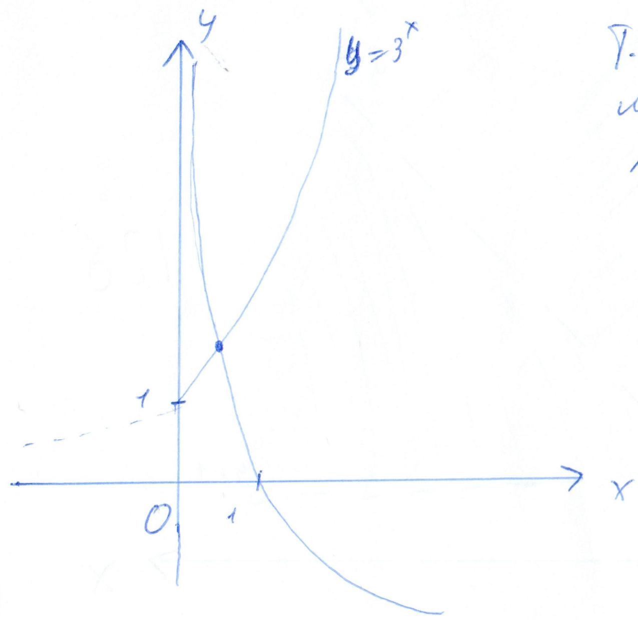
Рассмотрим урав. (2): $\frac{1}{2^y} = x^3$;

$2^y = \frac{1}{x^3}$

$y = \log_2\left(\frac{1}{x^3}\right) = \log_2 1 - \log_2 x^3 = 0 - 3\log_2 x = \underline{-3\log_2 x}$

$f(x) = \log_2 x$ – мон. возр. функция, значит $-3\log_2 x$ – монотон. убывающая.

Изобразим:



Т.к. $f_1(x)$ – монотон. возр. функция, а $f_2(x)$ – монотонноубывающая функция, то $f_1(x) = f_2(x)$ только при $\underline{1 \text{ единственном } x_0}$.

Вернёмся к $\underline{x^3 \cdot 2^{3^{2x}} = 1}$;

20б

Заметим, что $x = \frac{1}{2}$ – корень:

$\frac{1}{8} \cdot 2^3 = \frac{1}{8} \cdot 8 = 1$ – действительно.

Т.к. мы доказали, что корень только один, то $x_0 = \frac{1}{2}$ – единственное решение x в системе;

$y = 3^{2 \cdot \frac{1}{2}} = 3$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 3\right)$

2

№11.2

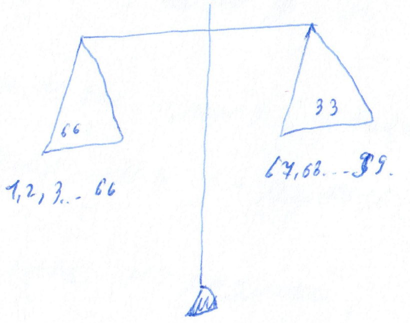
а) $n=90$;

$S_n = \frac{90+1}{2}\cdot 90 = 91\cdot 45$ — масса всех гирь

~~Никак нельзя~~ т.к. весы уравновешены, то ~~на~~ чаши весят x и x гр., значит их сумма 2x — чётна, а 91·45 — нечт. ⇒ Так разложить гирьки нельзя.

0б

б) $n=99$;



S_{min} гирек слева — ~~сумма~~ сумма: $1+2+...+66$;

$S_{min} = \frac{1+66}{2}\cdot 66 = 67\cdot 33 = 2211$

S_{max} гирек справа — сумма: $67+68+...+99$;

$\frac{67+99}{2}\cdot 33 = 83\cdot 33 = 2739$

$2739 - 2211 = 528$ — столько грамм с правой чаши надо перераспределить;

Если, к примеру, поменять гири (весом) 66 и 99 местами, то разница в весе будет: $528 - 2\cdot(99-66) = 528 - 66 = 462$.

Заметим, что $528 \vdots 66$, т.е. если провести такую операцию $\frac{528}{66} = 8$ раз, то чаши уравновесятся:

66 ⟷ 99
65 ⟷ 98
64 ⟷ 97
63 ⟷ 96
62 ⟷ 95
61 ⟷ 94
60 ⟷ 93
59 ⟷ 92

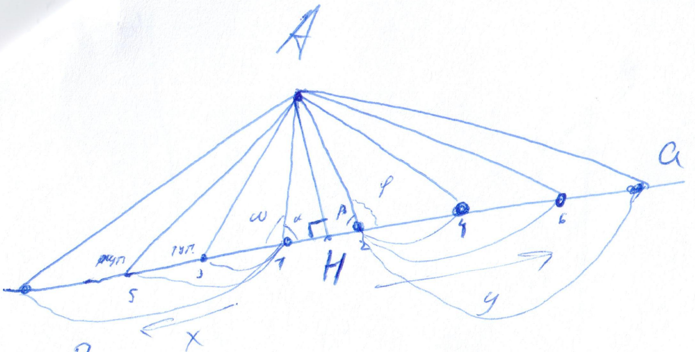
12 б

Такое возможно.

Значит, при $n=99$ гирьки можно расположить таким образом.

3

№ 11.3



n точек на прямой; $n > 2$.

т. $A \notin a$

1 Рассмотрим такую модель:

1) Пусть т. A находится „где-то посередине", т.е. если опустить перпендикуляр AH, то разность $x - y$ (x - кол-во точек слева, y - кол-во точек справа от основания перпендикуляра) ~~[illegible]~~ по модулю не превышала 1.

2) Расположим A по высоте так, чтобы „первый" $\triangle A12$ был остроугольный, тогда углы α и β - острые $\Rightarrow$ углы ω и φ - тупые (смежные с остр.);

3) $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ - кол-во точек на прямой, $x + y = n$

Заметим, что в данной модели кол-во тупых треугольников равно:
слева:

$$(x-1) + (x-2) + (x-3) + \ldots + (x-(x-1)) = (x-1)x - \frac{x+x-x}{2} \cdot (x-1) = \frac{x(x-1)}{2}$$

Справа:

$$(y-1) + (y-2) + (y-3) \ldots + (y-(y-1)) = (y-1)y - \frac{y-x+x}{2} \cdot (y-1) = \frac{y(y-1)}{2}$$

Докажем, что:

$$\frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2} < \frac{n(n-1)}{2} \quad | \cdot 2$$

($\frac{n(n-1)}{2}$ - кол-во всех треугольников)

$$x^2 - x + y^2 - y < (x+y)(x+y-1)$$

$$x^2 - x + y^2 - y < x^2 + xy - x + yx + y^2 - y$$

$2xy > 0$; $x, y > 0$, ~~поэтому неравенство~~ т.к. $n > 2$ и т. A — „где-то посередине";

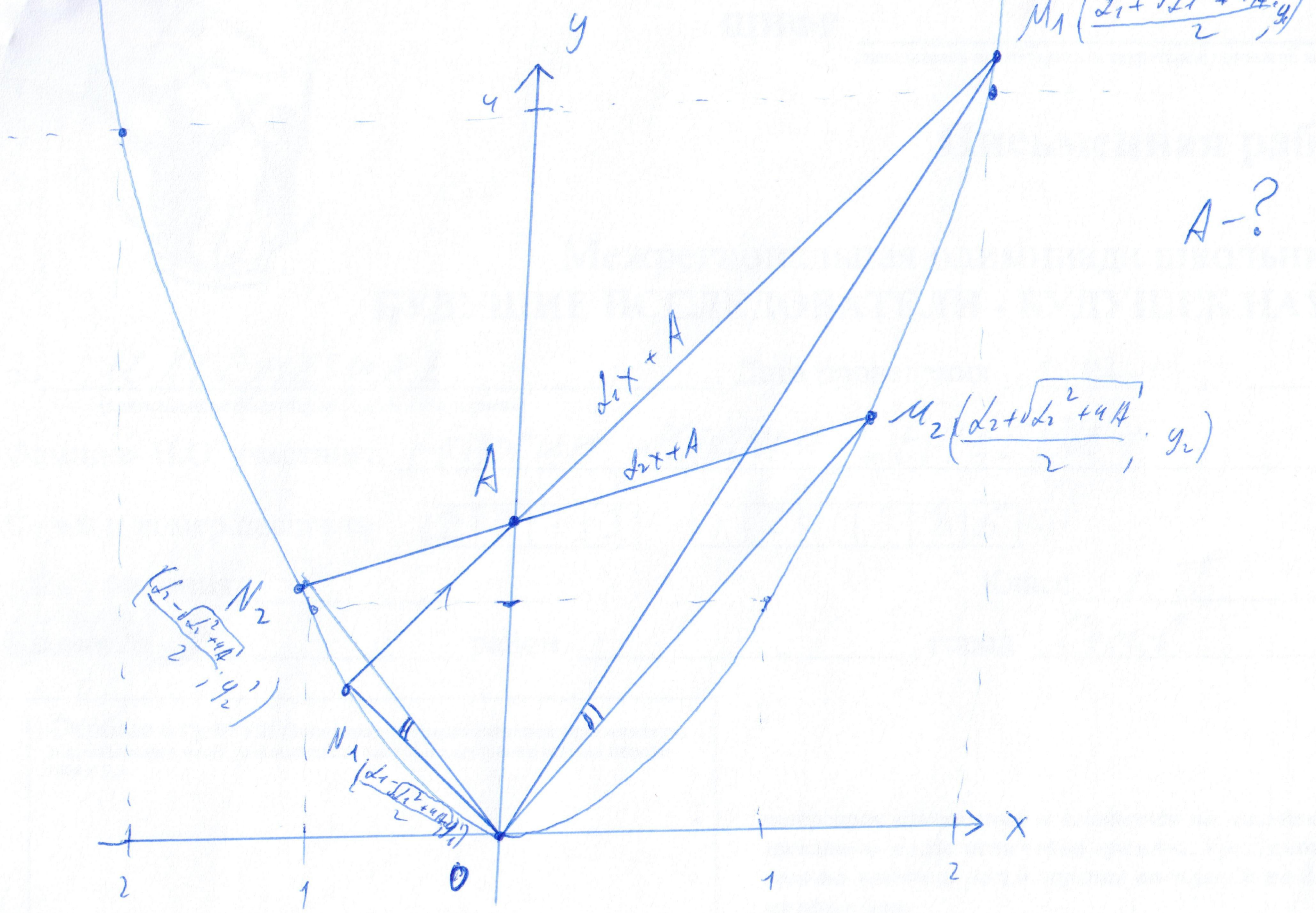
значит неравенство верное.

Доказано, что в данной модели кол-во тупоугольных меньше половины, значит остроугольных больше половины.

8б

4

№ 11.4.



1) $\angle M_1ON_1 = \angle N_2OM_1 + \angle M_1ON_2$

$\angle M_2ON_2 = \angle N_2OM_1 + \angle M_1OM_2$ $\Rightarrow \underline{\angle M_1ON_2 = \angle M_1OM_2}$

2) $\alpha_1 x + A = x^2$;

$x^2 - \alpha_1 x - A = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2+4A}}{2}$

$\alpha_2 x + A = x^2$

$x_{1,2} = \dfrac{\alpha_2 \pm \sqrt{\alpha_2^2+4A}}{2}$

4б

3)

5