ШИФР 1106

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

# Письменная работа

## Межрегиональная олимпиада школьников
## БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по МАТЕМАТИКЕ Дата проведения 11.02.2018

(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Оськин ~~Р.Ю.~~ Роман Юрьевич

Серия и номер паспорта | 2 | 2 | 1 | 4 | | 3 | 0 | 5 | 6 | 0 | 3 |

Дата рождения 24.10.2000

Класс 11

~~Школа~~ Лицей № 3 район ________ город Саров

**Особые отметки** (Заполняется представителем оргкомитета) о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

**Правила поведения**

Участник очного тура олимпиады **обязан:**

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

***Внимание.*** *Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.*

Участнику олимпиады **запрещается:**

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

*Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.*

**Оформление работы**

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись (другие **записи на папке делать запрещено**).

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

***Внимание!*** *Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.*

**С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен**

________________

(подпись участника олимпиады)

1106

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 20 | 12 | – | 16 | 52 |

№1.

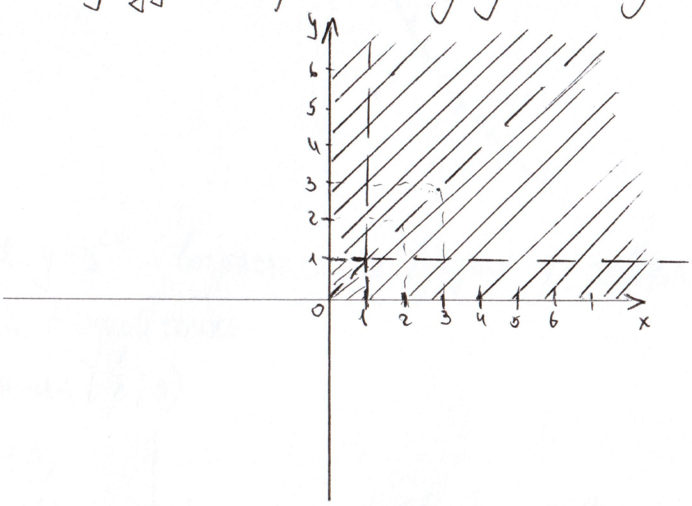
$\log_x y + \log_y x > 2$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ x > 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 0 < y < 1 \\ y > 1 \end{array}\right. \\ \log_x y + \dfrac{1}{\log_x y} > 2 \end{cases}$$

При допустимых $x$ и $y$, по неравенству Коши $\log_x y + \frac{1}{\log_x y} \geq 2$.

Причём $\log_x y + \frac{1}{\log_x y} = 2$, когда $\log_x y = 1$, т.е. $y = x$.

Получаем, что неравенству удовлетворяют все допустимые значения $x$ и $y$, где $x \neq y$.




4б

№2.

а) При $n = 90$ сумма весов на всех гирьках равна $\frac{1+90}{2} \cdot 90 = 91 \cdot 45$ – нечётно.

Т.к. сумма весов нечётна, то на каждой чаше весов должен быть нецелый вес, но это невозможно, т.к. гирька весит целое кол-во грамм.

б) При $n = 99$ сумма весов всех гирек равна $\frac{1+99}{2} \cdot 99 = 4950$ гр. т.е. по 2475 гр на каждой чаше.

При этом на одной из чаш должно быть 33 гирьки, а на другой 66.

Поставим на одну из чаш гирьки весами $1, 2, 3, 67, 68, \ldots, 72, 74, \ldots, 97$. А на другую чашу оставшиеся.

Тогда на этой чаше будет $3 + 6 + 24 = 33$ гирьки. А их суммарный вес будет равен $6 + \frac{67+72}{2} \cdot 6 + \frac{74+97}{2} \cdot 24 = 6 + 417 + 2052 = 2475$ гр.

Значит на другой чаше будет 66 гирек весом 2475 гр.

20б

Ответ: а) нельзя

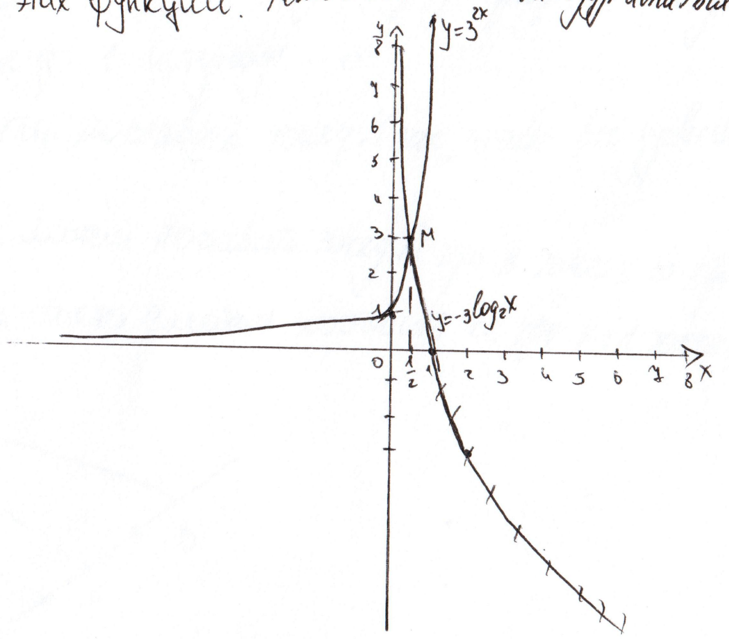
б) можно.

①

$$\begin{cases} 3^x = \sqrt{y} \\ 2^{-y} = x^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y \geq 0 \\ y = 3^{2x} \\ y = \log_{\frac{1}{2}}(x^3) \end{cases} \qquad \begin{cases} y \geq 0 \\ y = 3^{2x} \\ y = -3\log_2 x \end{cases}$$

1. Рассмотрим функции $y=3^{2x}$ и $y=-3\log_2 x$ при $y \geq 0$.

Начертим графики этих функций. Решением системы будут являться все точки пересечения этих графиков.




2. При $y \geq 0$ функция $y=3^{2x}$ – возрастает, а функция $y=-3\log_2 x$ – убывает, значит их графики могут пересекаться только в одной точке.

Заметим, что это точка $(\frac{1}{2};3)$

1б

При $x=\frac{1}{2}$; $y=3^{2\cdot\frac{1}{2}}=3$;

$y=-3\log_2(\frac{1}{2})=3$

$3=3$

Значит точка $(\frac{1}{2};3)$ действительно является точкой пересечения этих графиков, а значит и единств. решением.

Ответ: $(\frac{1}{2};3)$.

№3.

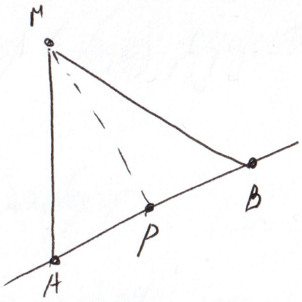
Докажем, что можно при помощи метода математической индукции.

1. База

Пусть на прямой 3 точки, причём A – точка с самой маленькой x координатой; B – точка прямой с самой большой x коорд., P – оставшаяся точка.

Тогда поставим точку M так, что треугольник AMB будет остроугольным.

ри этом можно будет построить 3 треуг.: $\triangle AMB, \triangle APM, \triangle BPA$ ?




Если $\triangle APM$ - тупоуг., то $\angle APM > 90°$, тогда $\angle BPM < 90°$ и $\triangle BPM$ - остроуг.

Если $\triangle APM$ - остроуг., то $\angle APM < 90°$, тогда $\angle BPM > 90°$ и $\triangle BPM$ - тупоуг.

Если $\angle APM = 90°$, то $\triangle APM$ и $\triangle BPM$ - прямоуг.

Получаем, что возможны случаи когда остроуг. треуг.-2, тогда тупоуг. треуг-1.

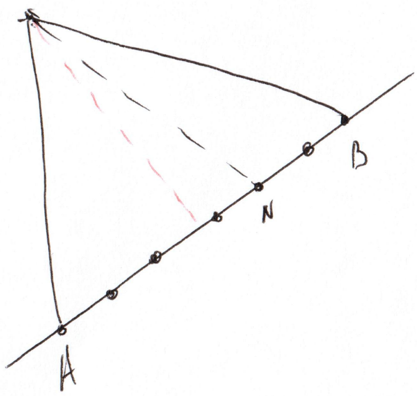
Либо остроуг. треуг-1 и тупоуг. - 0.

Т.е. мы смогли поставить точку M так, чтобы всё удовлетв. условию.

2. Допустим, что мы можем поставить точку M при n точках на прямой.

Докажем, что мы также сможем поставить её при n+1 точках на прямой.

3.




12б

Если ~~хот~~ у новой точки N на прямой самая маленькая x коорд или самая большая x коорд, то пере-обозначим её за A или B соотв. и возьмём в кач-ве точки N, любую другую точку на отрезке AB.

Рассмотрим все точки $T_i$ у которых x коорд меньше, чем у точки N и $T_j$ у которых x коорд больше, чем у т. N

Если $\angle ANM$ - тупой, то все треугольники $T_iNM$ - тупоугольные, пусть их кол-во - $N_1$.
И все треугольники $T_jNM$ - остроугольные - их кол-во - $N_2$.

Если $N_2 \geq N_1$, то оставим всё как есть.

Если же $N_2 < N_1$, то передвинем точку M так, что все треуг $T_iNM$ станут остроуг, а все треуг. $\triangle T_jNM$ станут тупоуг., при этом отношение кол-ва остроуг. и тупоуг. треугольников не изменится, т.к.

не изменится кол-во пар тупоуг. треуг. - остроуг. треуг. (как например в базе), существовавших до добавления точки N.

Потому что тупоугольный треугольник в паре станет остроуг. и наоборот.

Т. е. индукционное предположение останется верным и кол-во остроуг. треуг. будет больше кол-ва тупоуг.

А т.к. разность числа остроуг. и тупоуг. треугольников только увеличилась, то мы смогли поставить точку N нужным образом.

Тогда для любого кол-ва точек на прямой (>2) мы сможем поставить точку M так, чтобы это удовл. условию.