ШИФР 1105

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по МАТЕМАТИКЕ Дата проведения 10.02.2019

(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Арапов Дмитрий Андреевич

Серия и номер паспорта | 2 | 2 | 1 | 5 | | 3 | 9 | 7 | 4 | 0 | 0 |

Дата рождения 22.08.2001 Класс 11

Школа № Лицей №3 район ______ город Саров

Особые отметки **(Заполняется представителем оргкомитета)** о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады **обязан**:
- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

***Внимание**. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.*

Участнику олимпиады **запрещается**:
- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись (**другие записи на папке делать запрещено**).

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! *Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.*

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

Араб

(подпись участника олимпиады)

№2.

1105

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(0) = c$

$A(0; c)$

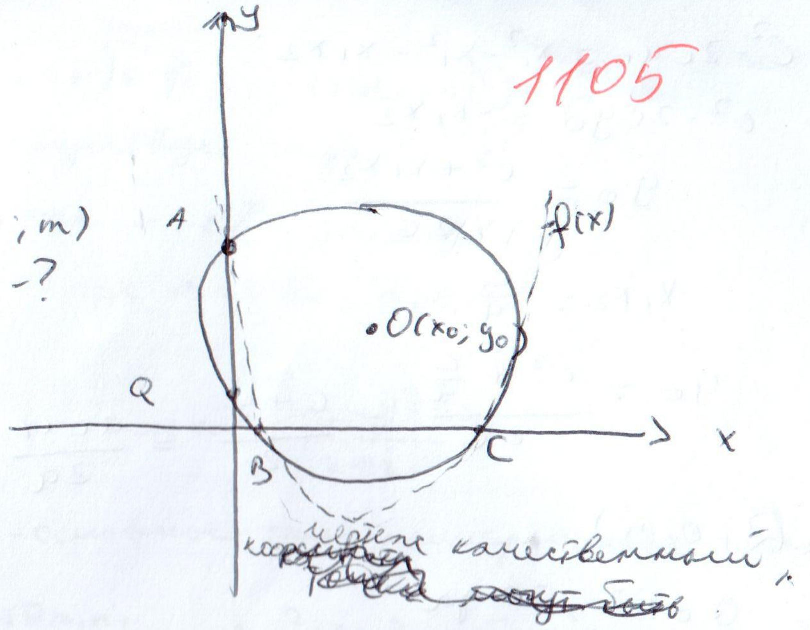
$f(x) = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$Q(0; m)$

m - ?



где x_1, x_2 - абсциссы точек пересечения $f(x)$ и OX (т.е. абсциссы точек B и C)

O - центр окружности ω, $A, B, C \in \omega$

ω вторично пересекает OY в точке Q

Запишем уравнение окружности ω

$$\begin{cases} (0-x_0)^2 + (c-y_0)^2 = R^2 \quad (1) \\ (x_1-x_0)^2 + (0-y_0)^2 = R^2 \quad (2) \\ (x_2-x_0)^2 + (0-y_0)^2 = R^2 \quad (3) \end{cases}$$ где R - радиус окр. ω

1) (2) - (3)

$(x_1-x_0)^2 + (0-y_0)^2 - (x_2-x_0)^2 - (-y_0)^2 = 0$

$(x_1-x_0)^2 - (x_2-x_0)^2 = 0$

$(x_1 - x_0 - x_2 + x_0)(x_1 - x_0 + x_2 - x_0) = 0$

$(x_1 - x_2)(x_1 - x_0 + x_2 - x_0) = 0$

$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2x_0) = 0$

1	2	3	4	5	Σ
4	16	20	12	20	72

1.1) $x_1 = x_2$, точка точки B и C совпадают

Нас интересует случай, когда точки B и C различны

1.2) $x_1 + x_2 - 2x_0 = 0$

$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$

2) $(-x_0)^2 + (c-y_0)^2 = (x_1-x_0)^2 + (0-y_0)^2$

$x_0^2 + c^2 - 2cy_0 + y_0^2 = x_1^2 - 2x_1x_0 + x_0^2 + y_0^2$

$c^2 - 2cy_0 = x_1^2 - 2x_1x_0$ $\qquad x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$

$c^2 - 2cy_0 = x_1^2 - x_1(x_1 + x_2)$

1

$$c^2 - 2cy_0 = x_1^2 - x_1^2 - x_1x_2$$

$$c^2 - 2cy_0 = -x_1x_2$$

$$y_0 = \frac{c^2 + x_1x_2}{2c}$$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

$$y_0 = \frac{c^2 + \frac{c}{a}}{2c} = \frac{c + \frac{1}{a}}{2} = \frac{ac+1}{2a}$$

$Q(0;m)$

$Q \in \omega$, тогда

$$\begin{cases} (0 - x_0)^2 + (m - y_0)^2 = R^2 \\ R^2 = x_0^2 + (c - y_0)^2 \end{cases}$$?

$$x_0^2 + (m - y_0)^2 = x_0^2 + (c - y_0)^2$$

$$(m - y_0 - c + y_0)\cdot(m - y_0 + c - y_0) = 0$$

$$(m - c)(m + c - 2y_0) = 0$$

2.1) $m = c$, тогда точки Q и A совпадают

этот случай нас не интересует

2.2) $m + c - 2y_0 = 0$

$m = 2y_0 - c$

$m = 2y_0 - c$

$$m = 2\cdot\frac{ac+1}{2a} - c = \frac{ac+1}{a} - c = \frac{ac+1-ac}{a} = \frac{1}{a}$$

Ответ: $\frac{1}{a}$ + 16б

№5.

$\exists \alpha \in \mathbb{R}?: (2\sin\alpha+\sqrt{3}) \in \mathbb{Q}$; $(2\cos\alpha-\sqrt{3}) \in \mathbb{Q}$

Предположим, что существует, тогда

$2\sin\alpha+\sqrt{3} = \frac{m_1}{n_1}$ (1), где $m_1 \in \mathbb{Z}$; $n_1 \in \mathbb{N}$

$2\cos\alpha-\sqrt{3} = \frac{m_2}{n_2}$ (2), где $m_2 \in \mathbb{Z}$; $n_2 \in \mathbb{N}$

$\sin\alpha = \frac{m_1-\sqrt{3}n_1}{2n_1}$; $\cos\alpha = \frac{m_2+\sqrt{3}n_2}{2n_2}$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ - основное тригонометрическое тождество

$1 - \frac{m_1^2+3n_1^2-2\sqrt{3}m_1n_1}{4n_1^2} = \frac{m_2^2+3n_2^2+2\sqrt{3}m_2n_2}{4n_2^2}$

$\frac{n_1^2-m_1^2+2\sqrt{3}m_1n_1}{4n_1^2} = \frac{m_2^2+3n_2^2+2\sqrt{3}m_2n_2}{4n_2^2} \quad | \cdot 4n_1^2n_2 \neq 0$

Если $\left[\begin{array}{l} n_1=0 \\ n_2=0 \end{array}\right.$ то не существует таких $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, т.к. $\Rightarrow$ ~~нельзя~~ $\sin\alpha = \frac{m_1-\sqrt{3}n_1}{2n_1}$, $\cos\alpha = \frac{m_2+\sqrt{3}n_2}{2n_2}$

$n_1n_2^2 - m_1^2n_2^2 + 2\sqrt{3}n_1m_1n_2^2 = m_2^2n_1^2 + 3n_1^2n_2^2 + 2\sqrt{3}n_1^2m_2n_2$

$n_1^2m_2^2 + 2n_1^2n_2^2 + m_1^2n_2^2 + 2\sqrt{3}n_1n_2(n_1m_2 - m_1n_2) = 0$

$n_1^2m_2^2 \in \mathbb{Q}$

$2n_1^2n_2^2 \in \mathbb{Q}$

$m_1^2n_2^2 \in \mathbb{Q}$

Если $2\sqrt{3}n_1n_2(n_1m_2-m_1n_2) \neq 0$, то $2\sqrt{3}n_1n_2(n_1m_2-m_1n_2) \in \mathbb{I}$, т.к. $n_1n_2 \in \mathbb{Q}$; $(n_1m_2-m_1n_2) \in \mathbb{Q}$, $2\sqrt{3} \in \mathbb{I}$

1) Если $2\sqrt{3}n_1n_2(n_1m_2-m_1n_2) \in \mathbb{I}$, т.е. если $2\sqrt{3}n_1n_2(n_1m_2-m_1n_2) \neq 0$, то

$n_1^2m_2^2 + 2n_1^2n_2^2 + m_1^2n_2^2 + 2\sqrt{3}n_1n_2(n_1m_2-m_1n_2) \in \mathbb{I}$, а

значит $n_1^2m_2^2 + 2n_1^2n_2^2 + m_1^2n_2^2 + 2\sqrt{3}n_1n_2(n_1m_2-m_1n_2) \neq 0$

2) Если $2\sqrt{3}n_1n_2(n_1m_2-m_1n_2) = 0$, то

$n_1^2m_2^2 + 2n_1^2n_2^2 + m_1^2n_2^2 = 0$

$\begin{cases} n_1^2m_2^2 = 0 & (1) \\ 2n_1^2n_2^2 = 0 & (2) \\ m_1^2n_2^2 = 0 & (3) \end{cases}$

Рассмотрим (2) системы

$2n_1^2n_2^2 = 0$

$\left[\begin{array}{l} n_1=0 \\ n_2=0 \end{array}\right.$

$$\begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{m_1 - \sqrt{3}n_1}{2n_1} \\ \cos\alpha = \dfrac{m_2 + \sqrt{3}n_2}{2n_2} \\ \left[\begin{array}{l} m_1 = 0 \\ n_2 = 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

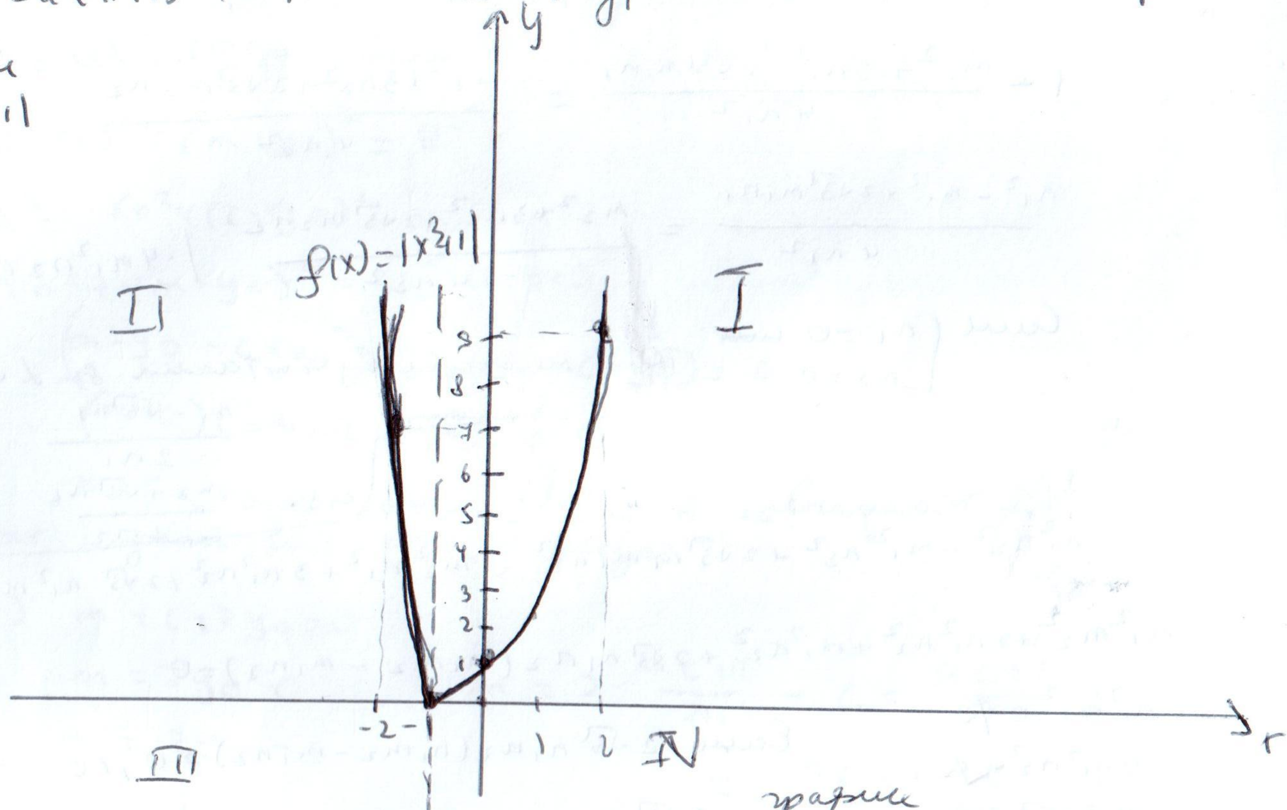
А значит, не существует $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ удовлетворяющих условиям задачи

Ответ: Нет, не существует + 20б

№1.

$|x^3+1| = a(x+1)$. При каких a уравнение имеет 3 корня?

Построим $f(x) = |x^3+1|$



Пусть $g(x) = a(x+1)$. При $\forall a \in \mathbb{R}$; график $g(x)$ проходит через точку $(-1; 0)$

При конкретном значении a $g(x)$ - это одна из семейства всевозможных прямых, проходящих через точку $(-1; 0)$

Прямые $y=0$ и $x=-1$ делят координатную плоскость на 4 части.

Пронумеруем их, как на рисунке

Одна из двух "частей" графика $f(x)$ полностью лежит в I, вторая - полностью во второй. За исключением точки $(-1; 0)$

любая из прямых, проходящая через точку $(-1; 0)$

лежит в I и III или II и IV четвертях

Если прямая проходит через I и II четверть, то

$g(-1) \neq 0$

т.е. нет таких a, при которых график $g(x)$ проходил через I и II четверть, а значит нет такой прямой, которая бы пересекала и часть графика $f(x)$, которая лежит в I четверти, и во ~~второй~~ II четверти

Уравнение $f(x) = g(x)$ имеет 3 решения, когда графики $f(x)$ и $g(x)$ имеют 3 общие точки

Одна из них $(-1; 0)$ при $\forall a \in \mathbb{R}$.

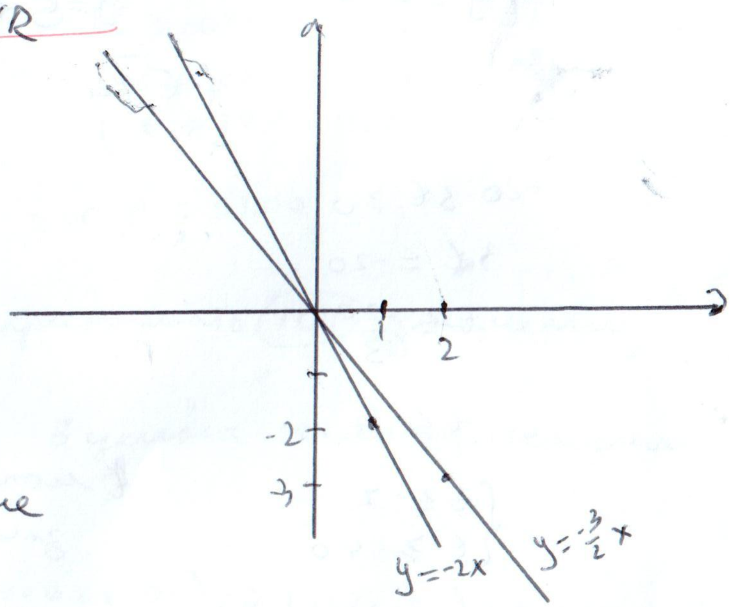
$\nexists a \in \mathbb{R}$: $f(x)$ и $g(x)$ имеют еще 2 общие точки, помимо $(-1; 0)$

ответ: нет таких $a \in \mathbb{R}$

$-$ 4 б

№4.

$|3x+2y| + |2x+y| = 100$



1) $x \geq 0$; $y \geq -2x$; $y \geq -\frac{3}{2}x$

$3x+2y+2x+y=100$

$5x+3y=100$

$(20; 0)$ – частное решение

$\begin{cases} x = 20-3t \\ y = 5t \end{cases}$ $t \in \mathbb{Z}$

$20-3t \geq 0$

$t \leq \frac{20}{3}$

$t \leq 6$

$5t \geq -\frac{3}{2}(20-3t)$

$5t \geq -30 + \frac{9}{2}t$

$\frac{t}{2} \geq -30$

$t \geq -60$

$-60 \leq t \leq 6$

Всего t может принимать 67 значений

т.е. это 67 различных решений

2) $x \geqslant 0$ $\quad -2x \leq y \leq -\frac{3}{2}x$

$2y + 3x \leq 0$

$y + 2x \geqslant 0$

$-3x - 2y + 2x + y = 100$

$x + y = -100$

$(0; -100)$ – частное решение

$\begin{cases} x = -t \\ y = -100 + t \end{cases}$ $\quad t \in \mathbb{Z}$

$t \leq 0$

$\begin{cases} t \leq 0 \\ -100 + t \geqslant +2t \\ -100 + t \leq +\frac{3}{2}t \end{cases}$

$\begin{cases} 3t \geqslant 100 \\ \frac{5}{2}t \leq 100 \end{cases}$

$t \geqslant 34$ $\quad \begin{cases} t \leq -100 \\ t \geqslant -200 \end{cases}$

t может принимать 101 значение, а это 101 пара (x, y), $x, y \in \mathbb{Z}$, удовлетв. исходному уравнению

3) $x \geqslant 0$

$y \leq -2x$; $y \leq -\frac{3}{2}x$

$-3x - 2y - 2x - y = 100$

$5x + 3y = -100$

$(-20; 0)$ – частное решение

$\begin{cases} t = -20 - 3t \\ y = 0 + 5t \end{cases}$ $\quad x = -20 - 3t$, $y = 5t$

$\begin{cases} y \leq -2x \\ y \leq -\frac{3}{2}x \\ x \geqslant 0 \end{cases}$

$y \leq -2x$

$t \in \mathbb{Z}$

$5t \leq -2(-20 - 3t)$

$5t \leq 40 + 6t$

$t \geqslant -40$

$-20 - 3t \geqslant 0$

$3t \leq -20$

$t \leq \frac{-20}{3}$

$t \leq -7$

$\begin{cases} t \leq -7 \\ t \geqslant -40 \end{cases}$

t может принимать 34 различных значения

4) $x \leq 0$ $\quad y \geqslant -\frac{3}{2}x$; $y \geqslant -2x$

$3x + 2y + 2x + y = 100$

$5x + 3y = 100$

$(20; 0)$ – частное решение

$\begin{cases} x = 20 - 3t \\ y = 5t \end{cases}$

$t \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} 20 - 3t \leq 0 \\ 5t \geqslant -\frac{3}{2}(20 - 3t) \\ 5t \geqslant -2(20 - 3t) \end{cases}$ 6

$\begin{cases} t \geqslant 7 \\ t \geqslant -60 \\ t \leq 40 \end{cases}$

$7 \leq t \leq 40$

t может принимать 34 различных значения

$x \le 0$ $\quad y \le -\frac{3}{2}x$; $y \le -2x$

$2y+3x\le 0 \qquad y+2x\le 0$

$-3x-2y-2x-y=100$

$5x+3y=100$

$(-20;0)$ - частный случай

$\begin{cases} x=-20-3t \\ y=5t \end{cases} \quad t\in\mathbb{Z}$

$\begin{cases} -20-3t\le 0 \\ 5t \le -\frac{3}{2}(-20-3t) \\ 5t\le -2(-20-3t) \end{cases}$

$\cancel{t\ge -7}$

$\begin{cases} t\ge -6 \\ t\le 60 \\ t\ge -40 \end{cases}$

$-6\le t\le 60$

t может принимать 67 различных значений

б) $x\le 0$

$-\frac{3}{2}x\le y\le -2x$

$y+\frac{3}{2}x\ge 0 \qquad y+2x\le 0$

$3x+2y-2x-y=100$

$x+y=100$

~~(20~~ $(100;0)$ - частное реш

$\begin{cases} x=100-t \\ y=0+t \end{cases}$

$\begin{cases} 100-t\le 0 \\ t\ge -\frac{3}{2}(100-t) \\ t\le -2(100-t) \end{cases}$

$\begin{cases} t\ge 100 \\ t\le 300 \\ t\ge 200 \end{cases}$

$200\le t\le 300$

t может принимать 101 значение.

4) Общее число решений в целых числах исходного уравнения ~~есть~~

$2\cdot 34+2\cdot 101+2\cdot 67=2\cdot(34+67+101)=2\cdot(101+101)=4\cdot 101=404$

Мы везде писали нестрогое неравенство $x\ge 0$ или $x\le 0$

Но мы не посчитали никакие корни дважды

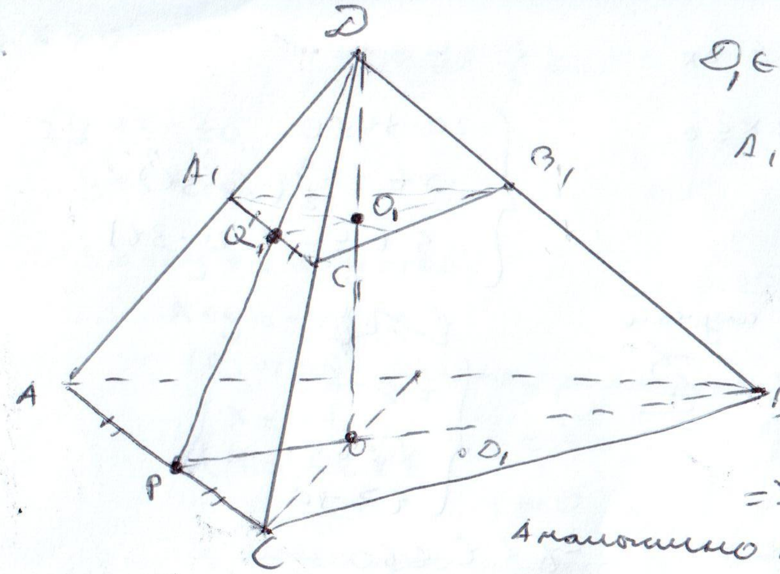
При $x=0$

$|2y|+|y|=100$

$3|y|=100$

$\varnothing$ при $y\in\mathbb{Z}$ $\qquad$ Ответ: 404 $\quad$ ± 12б

13.



$D_1 \in (ABC)$

$A_1B_1C_1 \parallel ABC$

$\left.\begin{array}{l} (A_1B_1C_1) \parallel (ABC) \\ A_1C_1 \subset (A_1B_1C_1) \\ A_1C_1 \subset (ADC) \\ AC \subset (ADC) \\ AC \subset (ABC) \end{array}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow A_1C_1 \parallel AC$

Аналогично $A_1B_1 \parallel AB$; $C_1B_1 \parallel BC$

1) $\triangle A_1DC_1 \sim \triangle ADC$, т.к. $A_1C_1 \parallel AC$, то $\angle DAC = \angle DA_1C_1$, $\angle A_1DC$ - общий

$\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{DC_1}{DC} = \frac{A_1D}{AD}$

Пусть $\frac{A_1C_1}{AC} = k$; k - коэфф. пропорцион.

2) $\triangle C_1DB_1 \sim \triangle CDB$, т.к. $\angle DC_1B_1 = \angle DCB$ (т.к. $C_1B_1 \parallel BC$), $\angle CDB$ - общий

Зн $\left.\begin{array}{l} \frac{DC_1}{DC} = \frac{C_1B_1}{CB} \\ \frac{DC_1}{DC} = k \end{array}\right| \Rightarrow \frac{C_1B_1}{CB} = k$

3) $\triangle A_1DB_1 \sim \triangle ADB$, т.к. $\angle DA_1B_1 = \angle DAB$ (т.к. $AB \parallel A_1B_1$), $\angle ADB$ - общий

$\left.\begin{array}{l} \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1D}{AD} \\ \frac{A_1D}{AD} = k \end{array}\right| \Rightarrow \frac{A_1B_1}{AB} = k$

4) $\left.\begin{array}{l} A_1C_1 = k \cdot AC \\ C_1B_1 = k \cdot BC \\ A_1B_1 = k \cdot AB \end{array}\right| \Rightarrow \triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$

$\frac{A_1C_1}{AC} = k$

Тогда $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = k^2$

$\rho(D, (ABC)) = DO$

$\rho(D; (A_1B_1C_1)) = DO_1$

O и O_1 – центры тяжести $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ соответственно.

(т.е. O и O_1 – точки пересечения медиан $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$)

Пусть $\rho(D; (ABC)) = H$, т.е. $DO = H$

$\rho(D; (A_1B_1C_1)) = h$, т.е. $DO_1 = h$

$QO_1 = \frac{1}{3} QB_1$

$PO = \frac{1}{3} PB$

$\frac{QB_1}{PB} = k$

(т.к. $\triangle A_1B_1C_1 \overset{k}{\sim} \triangle AKC$)

$\Rightarrow \frac{QO_1}{PO} = k$

$\triangle DQO_1 \sim \triangle DPO$ (т.к. $\angle QO_1D = \angle POD = 90°$; $\angle PDO$ – общий)

$\frac{DO_1}{DO} = \frac{QO_1}{PO} = k$

$\frac{h}{H} = k \quad (1)$

т.к. $(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$, то $\rho(D_1; (A_1B_1C_1)) = \rho(D; (ABC)) - \rho(D; (A_1B_1C_1)) = H - h$
$D_1 \in (ABC)$

$\rho(D_1; (A_1B_1C_1)) = H - h$

$V_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{3}(H-h) \cdot S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{3}(H-h) \cdot k^2 \cdot S_{ABC}$

$V = V_{ABCD} = \frac{1}{3} H \cdot S_{ABC}$

$\frac{V_{A_1B_1C_1D_1}}{V} = \frac{(H-h) \cdot k^2}{H} = (1 - \frac{h}{H}) \cdot k^2$

С учетом равенства (1) $\quad \frac{V_{A_1B_1C_1D_1}}{V} = (1-k) \cdot k^2$

Пусть $f(k) = (1-k)k^2$

$f(k) = k^2 - k^3$

$f'(k) = 2k - 3k^2$

$f'(k)$: $-$ $\quad 0 \quad$ $+$ $\quad \frac{2}{3} \quad$ $-$

$2k - 3k^2 = 0$

$k(2 - 3k) = 0$

$k = 0;\ k = \frac{2}{3}$ - ~~точки экстремума~~ стационарные точки $f(k)$

Найдем наибольшее значение $f(k)$

$f(0) = 0$

$f(\frac{2}{3}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3}$

$f(\frac{2}{3}) = \frac{4}{27}$ - наибольшее значение $f(k)$

$\frac{V_{A_1B_1C_1D_1}}{V} = f(k)$ $\qquad f(k) \le \frac{4}{27}$

$0 \le V_{A_1B_1C_1D_1} \le \frac{4}{27} \cdot V \Rightarrow V_{A_1B_1C_1D_1}$ не превосходит $\frac{4}{27} V$

ч.т.д. + 2б