ШИФР 1117

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по МАТЕМАТИКЕ Дата проведения 26.01.2020

(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника БОРИНА ИРИНА АНДРЕЕВНА

Серия и номер паспорта | 2 | 2 | 1 | 5 | | 4 | 6 | 9 | 6 | 9 | 8 |

Дата рождения 18.02.2002 Класс 11

Школа № 2 район ________ город Саров

Особые отметки (**Заполняется представителем оргкомитета**) о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады **обязан**:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады **запрещается**:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись (**другие записи на папке делать запрещено**).

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! *Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.*

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)

1117

11.2.

$\sin\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \vee \sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)$ $\quad \alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$

Отметим, что при $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\sin\alpha \geq 0$, $\cos\frac{\alpha}{2} \geq 0 \Rightarrow \sin\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \geq 0$

$\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha) \geq 0$, значит, можно возвести обе части в квадрат, и это будет равносильный переход

1	2	3	4	5	Σ
20	20	–	–	10	50

$\sin^2\alpha \cos^2\frac{\alpha}{2} \vee \sin^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)$

$\sin^2\alpha \cos^2\frac{\alpha}{2} \vee (\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha)^2$

$\sin^2\alpha \cos^2\frac{\alpha}{2} \vee \frac{1}{2} + \sin\alpha\cos\alpha$

$\frac{\sin^2\alpha}{2}(1+\cos\alpha) \vee \frac{1}{2} + \sin\alpha\cos\alpha$

$\frac{1}{2}\sin^2\alpha + \frac{1}{2}\sin^2\alpha\cos\alpha \vee \frac{1}{2} + \sin\alpha\cos\alpha$

$\frac{1}{2}\sin^2\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha \vee \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin^2\alpha$

$\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha - 2) \vee \frac{1}{2}\cos^2\alpha$

~~на~~ при $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$ $\quad \frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha-2) \leq 0$. 0 достигает в точках $\alpha = 0$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\quad$ т.к. $\sin\alpha - 2 < 0$ при $\forall \alpha$

при $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$ $\quad \frac{1}{2}\cos^2\alpha \geq 0$. 0 достигается в точке $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Следовательно, $\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha-2) \leq \frac{1}{2}\cos^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2} \leq \sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)$

при $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$

чтд

20.

11.5.

$f(x) = y = \frac{2020}{x}$; $\quad D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $\quad f'(x) = -\frac{2020}{x^2}$; $x \neq 0$

Ур-ие касательной к графику ф-ии $f(x)$ в точке x_0 имеет вид: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$y = \frac{2020}{x_0} + (-\frac{2020}{x_0^2})(x - x_0)$; $\quad (x_0 \neq 0)$

$y = \frac{2020}{x_0} - \frac{2020}{x_0^2}x + \frac{2020}{x_0}$

$y = -\frac{2020}{x_0^2}x + 2 \cdot \frac{2020}{x_0}$

Следует отметить, что касательная в т. x_1 графика данной ф-ии, не будет являться касательной в т. x_2 какой-нибудь графика этой же ф-ии.

Если касательная пересекает обе координатных оси в точках с целыми координатами, то это означает, что при $y=0$, $x \in \mathbb{Z}$ и при $x=0$, $y \in \mathbb{Z}$. Запишем это в виде системы:

$$\begin{cases} 0 = -\dfrac{2020}{x_0^2}x + 2\cdot\dfrac{2020}{x_0}, x \in \mathbb{Z} \\ y = 2\cdot\dfrac{2020}{x_0}, y \in \mathbb{Z} \end{cases}$$ т.к. $x_0 \neq 0$, то

$$\begin{cases} x = 2x_0 \\ y = 2\cdot\dfrac{2020}{x_0} \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Т.к. $x \in \mathbb{Z}$, то $x_0 \in \mathbb{Z}$ (иначе x будет либо дробным, либо иррациональным) и $2 \in \mathbb{Z}$

$2x_0 \in \mathbb{Z}$

$y = \dfrac{4\cdot 2020}{2x_0}$ ГН

$4\cdot 2020 \vdots x$

Значит, x_0 – это делитель числа $2\cdot 2020$ (а также тот же делитель, взятый с противоположным знаком).

2020	2
1010	2
505	5
101	101
1	

$2\cdot 2020 = 2^3\cdot 5^1\cdot 101^1$

Тогда, всего делителей у этого числа:

$(3+1)(1+1)(1+1) = 16$.

$16\cdot 2 = 32$ (с учетом отрицательных чисел) – всего точек.

Ответ: 32.

10б

11.1

$x^{10} - 3x^4 + x^2 + 1 = 0$

$x^{10} - x^4 - (2x^4 - x^2 - 1) = 0$

$x^4(x^6 - 1) - (2x^4 - x^2 - 1) = 0$

$x^4(x^2-1)(x^4+x^2+1) - (x^2-1)(2x^2+1) = 0$

$(x^2-1)(x^8+x^6+x^4-2x^2-1) = 0$

$(x^2-1)^2(x^6+2x^4+3x^2+1) = 0$

$$\begin{cases} (x^2-1)^2 = 0 \quad (1) \\ x^6+2x^4+3x^2+1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$ ~~x = ±1~~

$$\begin{array}{r|l} -\;2x^4 - x^2 - 1 & x^2 - 1 \\ \underline{2x^4 - 2x^2} & \overline{2x^2 + 1} \\ -\;x^2 - 1 & \\ \underline{x^2 - 1} & \\ 0 & \end{array}$$

~~x^8~~

$$\begin{array}{r|l} -\;x^8 + x^6 + x^4 - 2x^2 - 1 & x^2 - 1 \\ \underline{x^8 - x^6} & \overline{x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 1} \\ -\;2x^6 + x^4 & \\ \underline{2x^6 - 2x^4} & \\ -\;3x^4 - 2x^2 & \\ \underline{3x^4 - 3x^2} & \\ -\;x^2 - 1 & \\ \underline{x^2 - 1} & \\ 0 & \end{array}$$

(2) никогда не обращается в 0, т.к. все степени x четные, перед ними стоит знак „+", значит, наименьшее значение, которое может принимать выр-е $x^6+2x^4+3x^2+1$ равно 1 и достигается при $x=0$.

След., (2) не имеет решений.

(1) $x = \pm 1$ – это и есть решения первонач. ур-ия.

Ответ: $x = \pm 1$.

20