ШИФР 1123

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по МАТЕМАТИКЕ Дата проведения 26.01.2020.

(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника ФЕДОРЕНКО АРСЕНИЙ ГЛЕБОВИЧ

Серия и номер паспорта | 2 | 2 | 1 | 5 | | 4 | 6 | 9 | 4 | 2 | 9 |

Дата рождения 08.01.2002. Класс 11

Школа № 3 район ________ город Саров

Особые отметки **(Заполняется представителем оргкомитета)** о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады **обязан**:
- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады **запрещается**:
- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись (**другие записи на папке делать запрещено**).

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

________ (подпись участника олимпиады)

№11.1.

$x^{10}-3x^4+x^2+1=0$ 1123

Находя подбором подходящие корни, разложим по схеме Горнера:

1	2	3	4	5	Σ
20	20	0	12	10	62

$x^{10}-3x^4+x^2+1=0$

1 0 0 0 0 0 −3 0 1 0 1

−1 1 −1 1 −1 1 −1 −2 2 −1 1 0

$(x+1)(x^9-x^8+x^7-x^6+x^5-x^4-2x^3+2x^2-x+1)=0$

1 −1 1 −1 1 −1 −2 2 −1 1

−1 1 −2 3 −4 5 −6 4 −2 1 0

$(x+1)^2(x^8-2x^7+3x^6-4x^5+5x^4-6x^3+4x^2-2x+1)=0$

1 −2 3 −4 5 −6 4 −2 1

1 1 −1 2 −2 3 −3 1 −1 0

$(x+1)^2(x-1)(x^7-x^6+2x^5-2x^4+3x^3-3x^2+x-1)=0$

1 −1 2 −2 3 −3 1 −1

1 1 0 2 0 3 0 1 0

$(x+1)^2(x-1)^2(x^6+2x^4+3x^2+1)=0$

$x=-1$, $x=1$ – корни уравнения.

Рассмотрим $x^6+2x^4+3x^2+1=0$. $x^6\geqslant 0$, $2x^4\geqslant 0$, $3x^2\geqslant 0$ для $\forall x\in\mathbb{R}$.

Тогда, так как $1>0$, то $x^6+2x^4+3x^2+1>0$ для $\forall x\in\mathbb{R}$.

Итак $x=-1$, $x=1$ – единственные корни.

20.

Ответ: $x=-1$, $x=1$.

№11.5.

$y=\frac{2020}{x}$ $y'=-\frac{2020}{x^2}$

Уравнение касательной: $y_0=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ $y_0=-\frac{2020}{x_0^2}x+\frac{4040}{x_0}$, x_0 – абсцисса точки касания.

Точки пересечения с осью Oy: $y_0=\frac{4040}{x_0}$, $x_0\neq 0$, так как $x\neq 0$ из $y=\frac{2020}{x}$.

Если y_0 – целое, то x_0 – целый делитель числа 4040. $(0;y_0)$ – точка пересечения с Oy.

Точки пересечения с осью Ox: $-\frac{2020}{x_0^2}x+\frac{4040}{x_0}=0$ $x=2x_0$, где $x_0\neq 0$, x_0 – целое число.

$(2x_0;0)$ – точка пересечения с Ox.

В случае, если и x, и y_0 целые, x_0 должно быть целым делителем числа 4040.

$4040=2^3\cdot 5\cdot 101$

Положительных целых делителей у числа 4040: $(3+1)(1+1)(1+1)=16$.

Всего целых делителей у числа 4040: $2\cdot 16=32$.

Итак, на графике 32 точки, в которых касательная пересекает обе координатные оси в точках с целыми координатами. Дополнительные точки от $\frac{101}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{505}{2}$. $x=101, 5, 505$ и отрицательные.

Ответ: ~~32 точки~~ 38 точек.

10б

§11.2.

$\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2} \le \sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ для $\forall\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

$\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2} \vee \sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$

$\sin\alpha\cdot\sqrt{\frac{\cos\alpha+1}{2}} \vee \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\cdot\sqrt{\cos\alpha+1} \vee \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)$ $\qquad \sin\alpha\sqrt{\cos\alpha+1} \vee \sin\alpha+\cos\alpha$

На $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ $\sin\alpha\geqslant 0$, $\sqrt{\cos\alpha+1}\geqslant 0$, $\sin\alpha+\cos\alpha\geqslant 0$, тогда:

$\sin^2\alpha\cdot(\cos\alpha+1) \vee \sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha$

$\sin^2\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha \vee \sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha$

$\sin^2\alpha\cos\alpha \vee 2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha$

$\cos\alpha\left(\sin^2\alpha-2\sin\alpha-\cos\alpha\right)\vee 0$

$\cos\alpha\left(\sin\alpha(\sin\alpha-2)-\cos\alpha\right)\vee 0$

$\cos\alpha\geqslant 0$, $\sin\alpha\geqslant 0$, $\sin\alpha-2<0$, $-\cos\alpha\le 0$ на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, тогда

$\cos\alpha\left(\sin\alpha(\sin\alpha-2)-\cos\alpha\right)\le 0$ на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Следовательно, $\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\le\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ для $\forall\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. 20.

§11.3.

Всего игр сыграно: $\frac{14\cdot 13}{2}=91$.

Каждый игрок сыграл 13 игр.

Игр между выбранными тремя игроками и остальными 33.

0б.

S11.4.

Дано:

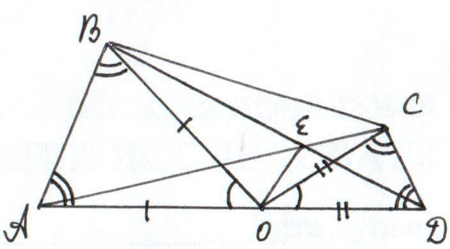
ABCD - выпуклый четырёхугольник.

$O \in AD$.

$AO = BO$, $CO = OD$.

$\angle BOA = \angle COD$.

$AC \cap BD = E$.



Доказать:

EO - биссектриса $\angle AED$.

Доказательство:

Так как $BO = AO$, то $\triangle BOA$ - р/б, $\angle OBA = \angle OAB = 180° - \angle BOA$.

Аналогично $\triangle COD$ - р/б, $\angle OCD = \angle ODC = 180° - \angle COD$.

$\angle COD = \angle BOA$, тогда $\angle OCD = \angle ODC = \angle OBA = \angle OAB$.

$\angle BOD = \angle COA = \angle BOC + \angle COD = \angle BOC + \angle BOA$

$\triangle BOD = \triangle COA$ по двум сторонам и углу между ними, тогда $BD = AC$, $\angle OBD = \angle CAD$,

$\angle BDA = \angle ACO$.

Около ABEO и CEOD можно описать окружность по свойству. ✓

$\angle AEO = \angle ABO = \smile AO$ | $\angle OED = \angle OCD = \smile OD$. |

$\angle ABO = \angle OCD$ по доказанному.

$\angle AEO = \angle DEO$, EO - биссектриса $\angle AED$.

12б