ШИФР 1114

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по МАТЕМАТИКЕ Дата проведения 26.01.2020

(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Гасеев Арсений Сергеевич

Серия и номер паспорта 2215 397477

Дата рождения 04.09.2001 Класс 11

Школа № 15 район ______ город Саров

Особые отметки **(Заполняется представителем оргкомитета)** о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады **обязан**:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

***Внимание**. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.*

Участнику олимпиады **запрещается**:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись (**другие записи на папке делать запрещено**).

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

***Внимание!** Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.*

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)

~~N 11~~. 1.

1114

1	2	3	4	5	Σ
16	16	10	—	12	54

$x^{10} - 3x^4 + x^2 + 1 = 0$

Пусть $x^2 = t$, $t \geq 0$

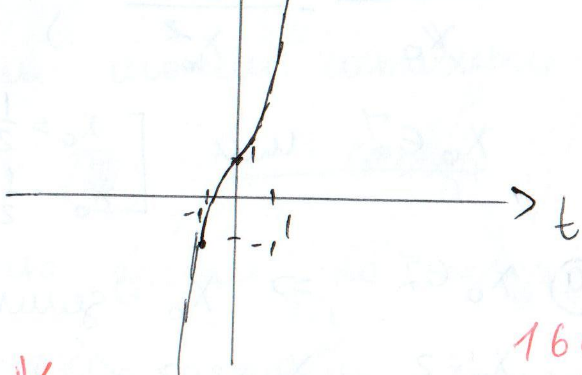
$t^5 - 3t^2 + t + 1 = 0$

$t = 1$ - корень уравнения

$(t^5 - 3t^2 + t + 1) = (t-1)(t^4 + t^3 + t^2 - 2t - 1) = (t-1)^2 (t^3 + 2t^2 + 3t + 1)$

$$\begin{array}{l|l}
t^5 + 0 + 0 - 3t^2 + t + 1 & t - 1 \\ \hline
-\ \underline{t^5 - t^4} & t^4 + t^3 + t^2 - 2t - 1 \\
\quad t^4 + 0 & \\
-\ \underline{t^4 - t^3} & \\
\quad\quad t^3 - 3t^2 & \\
-\ \underline{t^3 - t^2} & \\
\quad\quad\quad -2t^2 + t & \\
-\ \underline{-2t + 2t} & \\
\quad\quad\quad\quad -t + 1 & \\
-\ \underline{-t + 1} & \\
\quad\quad\quad\quad\quad 0 &
\end{array}$$

$(t-1)^2 (t^3 + 2t^2 + 3t + 1) = 0$



① $t = 1$, $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$

② $t^3 + 2t^2 + 3t + 1 = 0$

Схематично нарисуем график данной функции

V

16б

Видим, что точка пересеч. с Ox имеет отрицательную абсциссу, т.е $t<0$, но $t \geq 0$, $\Rightarrow$ корней удовлетвор. условию больше нет.

Ответ: $x=1$, $x=-1$.

№11.5.

$f(x) = \frac{2020}{x}$, $x \neq 0$

$f'(x) = (2020 \cdot x^{-1})' = -\frac{2020}{x^2}$

l - касательная в точке с абсциссой x_0

l: $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = \frac{2020}{x_0} + \frac{2020}{x_0} - \frac{2020}{x_0^2} \cdot x = \frac{2 \cdot 2020}{x_0} - \frac{2020 \cdot x}{x_0^2}$

(1) Пересекает Oy с цел. координатами, т.е. $x=0$

$\frac{2 \cdot 2020}{x_0} \in \mathbb{Z}$ $\quad \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101}{x_0} \in \mathbb{Z}$ $\quad (1)$

(2) Пересекает Ox с цел. координ., т.е. $x \in \mathbb{Z}$

$\frac{2 \cdot \cancel{2020}}{\cancel{x_0}} = \frac{\cancel{2020} \cdot x}{x_0^{\cancel{2}}}$, $\quad x = 2x_0$, но $x \in \mathbb{Z}$, $\Rightarrow$

$x_0 \in \mathbb{Z}$ или $\left[\begin{array}{l} x_0 = \frac{1}{2} \\ x_0 = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$

12б

(а) $x_0 \in \mathbb{Z}$, $\Rightarrow$ x_0 - делитель $(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101)$

$x_0 = 2$ $\quad \cancel{x_0 = 202}$ $\quad x_0 = 808$ $\quad C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 - 6 - 6 - 2 =$

$x_0 = 4$ $\quad \cancel{x_0 = 20}$ $\quad x_0 =$

$x_0 = 8$ $\quad \cancel{x_0 = 404}$ $\quad = \frac{5!}{4!} + \frac{5!}{2! \cdot 3!} + \frac{5!}{3! 2!} + \frac{5!}{4!} + \frac{5!}{5!} - 14 =$

$x_0 = 10$ $\quad \cancel{x_0 = 40}$ $\quad = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 - 14 = 31 - 14 = 17$

(б) $\left[\begin{array}{l} x_0 = \frac{1}{2} \\ x_0 = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$ тогда (1) - целое

$17 + 2 = 19$

Ответ: 19.

№11.3.

Предположим, что ~~такого~~ такой тройки не существует, т.е:

Возьмем первую тройку игроков. Найдется такой игрок что выиграл каждого из них. Обозначим его I. Возьмем вторую тройку. И снова найдется игрок II выигравший каждого. Аналогично с третьей тройкой будет игрок III, Возьмем четвертую тройку и найдется снова игрок выигравший всех из этой тройки, но это будет либо I либо II либо III, т.к. осталось всего 2 игрока. Но получается мы можем составить тройку из I, II, III, ~~и всегда~~ которая удовлетворяет условию задачи, но тогда получаем противоречие, => такая тройка существует, ч.т.д.

1б

№11.2.

① Доказать: $\sin\alpha \cos\frac{\alpha}{2} \le \sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$

$$\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2} \le \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\alpha+\cos\alpha\right) \qquad \alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$$

Т.к. $\sin\alpha \geq 0$, $\cos\frac{\alpha}{2}\geq 0$, $\cos\alpha \geq 0$, то:

$$\sin^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2} \le \frac{1}{2}\left(1+\cancel{2}\sin 2\alpha\right)$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha+1}{2}$$

$$\sin^2\alpha(\cos\alpha+1) \le 1+\cancel{2}\sin 2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$$

$$(1-\cos^2\alpha)(\cos\alpha+1) \le 1+\sin 2\alpha$$

$$\cos\alpha+\cancel{1}-\cos^3\alpha-\cos^2\alpha \le \cancel{1}+2\sin\alpha\cos\alpha \;\Big|:\cos\alpha, \quad \cos\alpha\geq 0$$

$$1-\cos^2\alpha-\cos\alpha \le 2\sin\alpha$$

$$\sin^2\alpha \le 2\sin\alpha+\cos\alpha$$

Т.к. $0\le\sin\alpha\le 1$, то $\sin\alpha \geq \sin^2\alpha$, $\cos\alpha\geq 0$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\sin^2\alpha \le 2\sin\alpha+\cos\alpha$, ч.т.д.

16б