ШИФР 1112

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по МАТЕМАТИКЕ Дата проведения 26.01.2020

(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Голубева Алёна Алексеевна

Серия и номер паспорта | 2 | 2 | 1 | 6 | | 5 | 5 | 6 | 8 | 9 | 9 |

Дата рождения 19.04.2002 Класс 11

Школа № 3 район город Саров

Особые отметки (**Заполняется представителем оргкомитета**) о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады **обязан**:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

***Внимание**. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.*

Участнику олимпиады **запрещается**:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись (**другие записи на папке делать запрещено**).

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

***Внимание!** Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.*

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

Голуб

(подпись участника олимпиады)

Лист 1

1112

№11.1

$x^{10}-3x^4+x^2+1=0$

1) Пусть $P(x)=x^{10}-3x^4+x^2+1$.

Подберём корни: $P(1)=1-3+1+1=0$ $x=1$ - корень

1	2	3	4	5	Σ
20	20	8	8	20	76

2) Схема горнера:

	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
P(x)	1	0	0	0	0	0	-3	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	-2	-2	-1	-1	0

$Q(x)=\underbrace{x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4}_{6}-2x^3-2x^2-x-1=0$

$Q(1)=6-2-2-1-1=6-6=0$ $x=1$ - корень.

3)

	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Q(x)	1	1	1	1	1	1	-2	-2	-1	-1
1	1	2	3	4	5	6	4	2	1	0

$F(x)=x^8+2x^7+3x^6+4x^5+5x^4+6x^3+4x^2+2x+1$

$F(-1)=\underbrace{1-2}_{-1}+\underbrace{3-4}_{-1}+\underbrace{5-6}_{-1}+4-2+1=4-3-2+1=0.$

$x=-1$ - корень.

4)

	8	7	6	5	4	3	2	1	0
F(x)	1	2	3	4	5	6	4	2	1
-1	1	1	2	2	3	3	1	1	0

~~$M(x)=x^8+x^7+2x^6+2x^5$~~

$M(x)=x^7+x^6+2x^5+2x^4+3x^3+3x^2+x+1$

$M(-1)=-1+1-2+2-3+3-1+1=0$ $x=-1$ - корень

5) $M(x)=(x+1)(x^6+2x^4+3x^2+1)$

20

$O(x)=x^6+2x^4+3x^2+1$

Расмотрим $O(x)=0$: $x^6+2x^4+3x^2+1=0$

$\forall x$ всвязи с четностью степеней: $x^6\geq0$ $x^4\geq0$ $x^2\geq0$,

№11.1 Лист 2

тогда $2x^4 \geq 0$ $3x^2 \geq 0$, значит,

$\forall x$ $x^6+2x^4+3x^2 \geq 0$ |+1

$\forall x$ $x^6+2x^4+3x^2+1 \geq 1$; значит ур-ние $x^2+2x^4+3x^2+1=0$ не имеет корней.

Тогда, корнями исходного ур-ния являются:

$x=\pm 1$

Ответ: $x=\pm 1$

№11.2

Док-ть: $\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2} \leq \sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)$, где α $\forall$угол $\in[0;\frac{\pi}{2}]$.

1) т.к. $\alpha\in[0;\frac{\pi}{2}]$, то $\cos\alpha\geq 0$; $\sin\alpha\geq 0$;
значит, $\frac{\alpha}{2}\in[0;\frac{\pi}{4}]$, т.е. $\sin\frac{\alpha}{2}\geq 0$; $\cos\frac{\alpha}{2}\geq 0$.

$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$

$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

и $\alpha\in[0;\frac{\pi}{2}]$.

2) Составим разность $\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}-\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)$ и сравним её значение с нулём:

① $\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha\cdot\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

② $\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}*\sin\alpha$

③ = ① − ②: $\sin\alpha\cdot\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\alpha=$

$=\underbrace{\sin\alpha\left(\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}_{1}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$

1) $\sin\alpha\left(\frac{\sqrt{1+\cos\alpha}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sin\alpha\left(\frac{\sqrt{1+\cos\alpha}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+\cos\alpha}-1\right)$

в связи с ограниченностью ф-ции $h(x)=\cos x$, а так же $\alpha\in[0;\frac{\pi}{2}]$: $\sqrt{1}\leq\sqrt{1+\cos\alpha}\leq\sqrt{2}$*, тогда

Лист 3

№ 11.2.

2) Знаем, что $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

(1) $\sin\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \geq 0$

(2) $\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha) \geq 0$

Поэтому можем возвести обе части нер-ва в квадрат, затем извлечь корень

3) Составим разность $(1)^2-(2)^2$ и сравним её с 0:

$(\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2})^2-(\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha))^2=\sin^2\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}-(\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha+$

$+\sin\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{4})^2=\sin^2\alpha\cdot\frac{1+\cos\alpha}{2}-(\frac{1}{\sqrt2}\cos\alpha+\frac{1}{\sqrt2}\sin\alpha)^2=$

$=\sin^2\alpha\cdot(\frac{1+\cos\alpha}{2})-\frac{1}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)^2=$

$=\frac{1}{2}(\underline{\sin^2\alpha}+\underline{\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}-\cos^2\alpha-\underline{2\sin\alpha\cos\alpha}-\underline{\sin^2\alpha})=$

$=\frac{1}{2}(\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha-2)-\cos^2\alpha) \quad \vee 0.$

4) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha(\sin\alpha-2)-\cos^2\alpha \quad \vee 0$

Учитывая, $\alpha\in[0;\frac{\pi}{2}]$; $\sin\alpha\geq0$, $\cos\alpha\geq0$, тогда $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\geq0$.

20

т.к. $h(x)=\sin x$ - ограниченная ф-ция, то $-1\leq\sin x\leq1$; учитывая значения $\alpha\in[0;\frac{\pi}{2}]$: $0\leq\sin\alpha\leq1 \mid -2$

$-2\leq\sin\alpha-2\leq-1$

Значит, $\sin\alpha-2\leq0$; тогда

$(\sin\alpha-2)\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\leq0$

$\cos^2\alpha\geq0\ \forall\alpha$. $(\sin\alpha-2)\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\cos^2\alpha\leq0\ \forall\alpha\in[0;\frac{\pi}{2}]$

$-\cos^2\alpha\leq0\ \forall\alpha$,

Лист 4.

л 11.2

Тогда $(\sin\alpha-2)\cdot\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha\le 0$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left(\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2-\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right)^2\le 0$$

$$\underbrace{\left(\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}_{1}\le\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)^2}_{2}$$

Зная, что 1 ≥ 0 и 2 ≥ 0 извлечем корень со знаком + :

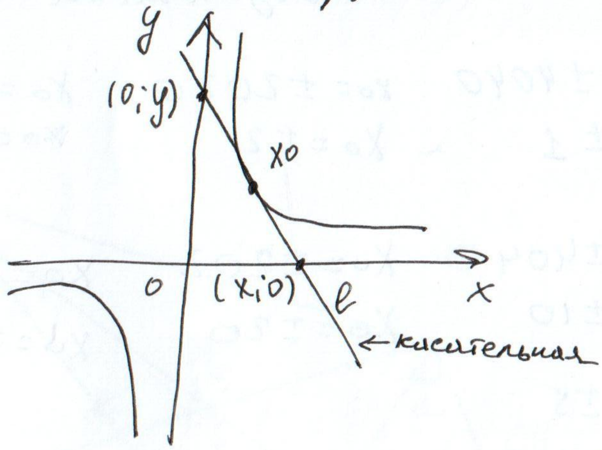
$$\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\le\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$$

Док-но.

Лист 5

№11.5.

1) Схема гр-ка $y=\frac{2020}{x}$.



2) Ур-ние касательной:

$$y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$

$$y=\left(\frac{2020}{x_0}\right)'\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$

$$y=-\frac{2020}{x_0^2}\cdot(x-x_0)+\frac{2020}{x_0}$$

$$y=\frac{-2020}{x_0^2}\cdot x+\frac{2020\cdot \cancel{x_0}}{x_0^2}+\frac{2020}{x_0}$$

$$y=\frac{-2020\cdot x}{x_0^2}+\frac{4040}{x_0}$$; x_0-абсцисса т. касания

3) Условие пересечения касат. осей координат в целых т.

$l\cap Oy$: $x=0;\ y\in\mathbb{Z}$; $l\cap Ox$: $x\in\mathbb{Z};\ y=0$

Получим: с Oy $(0;y)$ с Ox $(x;0)$

$$\begin{cases} y=\frac{4040}{x_0} \\ 0=\frac{-2020x}{x_0^2}+\frac{4040}{x_0} \end{cases} \quad \begin{cases} y=\frac{4040}{x_0} \\ \frac{2020x}{x_0^2}=\frac{4040}{x_0} \end{cases} \quad \begin{cases} y=\frac{4040}{x_0} \\ \frac{x}{x_0}=\frac{2}{1} \end{cases} \quad \begin{cases} y=\frac{4040}{x_0} \\ x=2x_0 \end{cases}$$

$$4040=2\cdot2020=2\cdot2\cdot1010=2^2\cdot10\cdot101=2^3\cdot5\cdot101.$$

$y=\frac{4040}{x/2}$

$y=\frac{8080}{x}$

$y=\frac{4040}{x_0}\in\mathbb{Z}$

~~$x_0=\pm4040$~~

~~$y=$~~

~~$x_0=\pm4040$~~; ~~$x_0=\pm2020$~~

~~$x_0=\pm8$~~; ~~$x_0=\pm5$~~; ~~$x_0=\pm101$~~

~~$x_0=\pm4$~~;

~~$x_0=\pm2$~~

x_0 необходимо искать среди множителей числа 4040:

$1\cdot2^3\cdot5\cdot101$ Вариантов $x_0=\pm4+$

20

№ 5 Возможные x_0 : Лист 6

$x_0 = \pm 4040$ $\quad x_0 = \pm 2020$ $\quad x_0 = \pm 1010$ $\quad x_0 = \pm 505$ $\quad$ ~~$x_0 = \pm 4$~~

$x_0 = \pm 1$ $\quad x_0 = \pm 2$ $\quad x_0 = \pm 4$ $\quad x_0 = \pm 8$ $\quad$ ~~$x_0 = \pm$~~

$x_0 = \pm 404$ $\quad x_0 = \pm 202$ $\quad x_0 = \pm 101$

$x_0 = \pm 10$ $\quad x_0 = \pm 20$ $\quad x_0 = \pm 40$

$x_0 = \pm 5$

$x_0 = \pm 808$

Всего: x_0 может принимать $16 \cdot 2 = 32$ значения (учитывая знаки ±)

~~Для x справедливо $y = \frac{8080}{x}$; тогда $8080 = 2 \cdot 4040$~~

~~т.е. в 2 раза больше комбинаций.~~

~~X может принимать $32 \cdot 2 = 64$ значения.~~

~~тогда из сист. ур-ний y также принимает 64 знач.~~

~~и единственной x соответствует единственному y;~~

~~Значит, возможных пар $(x;y)$ 64, т.е.~~

~~$\exists$ 64 точки~~

Ответ: 64 точки

Для $x \in \mathbb{Z}$: $y = \frac{8080}{x}$;

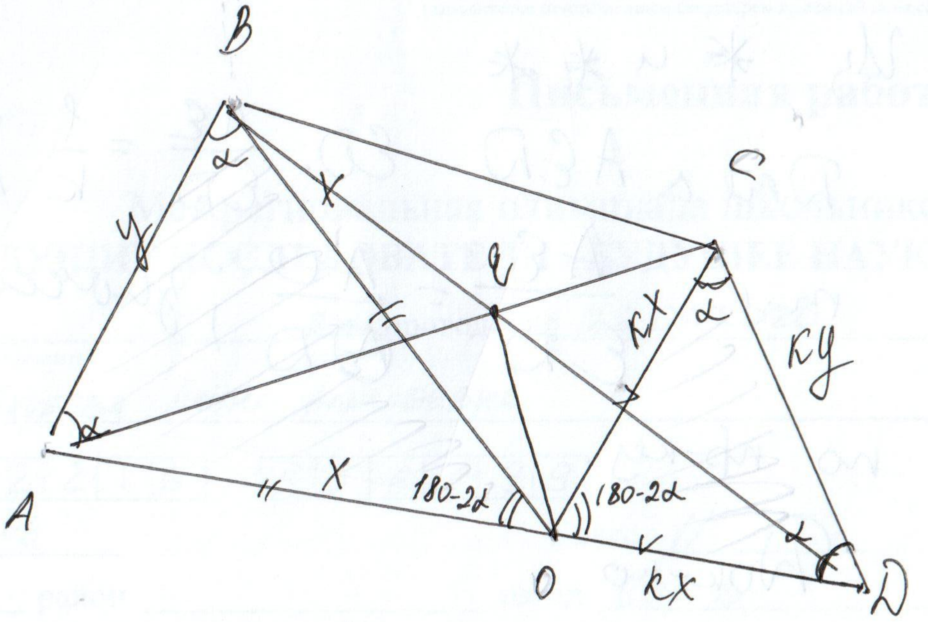
① $\left[\begin{array}{l} x = \pm 8080; \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$ $\quad$ ④ $\left[\begin{array}{l} x = \pm 4040 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$ $\quad$ ⑥ $\left[\begin{array}{l} x = \pm 2020 \\ x = \pm 4 \end{array}\right.$ $\quad$ ⑧ $\left[\begin{array}{l} x = \pm 1010 \\ x = \pm 8 \end{array}\right.$ $\quad$ ⑩ $\left[\begin{array}{l} x = \pm 505 \\ x = \pm 16 \end{array}\right.$

② $\left[\begin{array}{l} x = \pm 808 \\ x = \pm 10 \end{array}\right.$ $\quad$ ⑤ $\left[\begin{array}{l} x = 404 \\ x = \pm 20 \end{array}\right.$ $\quad$ ⑦ $\left[\begin{array}{l} x = \pm 202 \\ x = \pm 40 \end{array}\right.$ $\quad$ ⑨ $\left[\begin{array}{l} x = \pm 101 \\ x = \pm 80 \end{array}\right.$

③ $\left[\begin{array}{l} x = \pm 5 \\ x = \pm 404 \end{array}\right.$ $\qquad 10 \cdot 2 \cdot 2 = 40$

Т.е. $\exists$ 40 x удовл. условию $x \in \mathbb{Z}$; $y \in \mathbb{Z}$, и каждому единственному x соответствует единственный y, значит $\exists$ 40 пар $(x;y)$ удовл. условию: Ответ: 40 пар.

№11.4. Лист 7



1) $\triangle ABO$ – р/б по опред. пусть $\angle OBA = \angle BAO = \alpha$
тогда $\angle AOB = 180 - 2\alpha$ (по т. о сумме углов $\triangle$)

2) По условию задачи $\angle AOB = \angle COD = 180 - 2\alpha$
$\triangle COD$ – р/б, по опред., тогда $\angle OCD = \angle ODC = \left(\frac{180-(180-2\alpha)}{2}\right) = \alpha$,
по т. о сумме углов $\triangle$.

3) $\triangle ABO \sim \triangle CDO$, по 2 углам ($\angle A = \angle D = \alpha$; $\angle BOA = \angle COD = 180° - 2\alpha$).
тогда $\frac{OD}{AO} = \frac{CO}{BO} = \frac{CD}{AB} = k$; Пусть $BO = x$; $AB = y$
$CO = BO \cdot k$; $CO = kx$; $CD = k\,AB = ky$; $CO = OD = kx$.

3) $AC \cap BD = E$; EO. $\triangle AED$. $\frac{AO}{OD} = \frac{x}{kx} = \frac{1}{k}$ *

Т. косинусов: $\triangle COB$ $\angle BOC = (180° - 360° + 4\alpha) = 4\alpha - 180°$

$CO^2 = kx$ $\quad BC^2 = k^2x^2 + x^2 - 2kx^2 \cdot \cos(180 - 4\alpha)$
$BO = x$ $\quad BC^2 = x^2(k + 1 + 2\cos 4\alpha)$
$\cancel{BC^2 = x^2(k -}$

$\frac{S_{\triangle ABO}}{S_{\triangle COD}} = \left(\frac{1}{k}\right)^2$

~~По т. косинусов: AE =~~
Пусть $AE = m$; из $\triangle BEA$ и $\triangle DEC$, получим, что $ED = km$?

тогда $\frac{AE}{ED}=\frac{m}{km}=\frac{1}{k}$ $**$

Из $*$ и $**$

Для $\triangle AED$ EO: $\frac{AE}{ED}=\frac{1}{k}$; $\frac{AO}{OD}=\frac{1}{k}$;

т.е. $\frac{AE}{ED}=\frac{AO}{AD}$; значит, ED - биссектриса

8б

по пр-ку.

Док-но

№ 11.3.

1) Допустим, что нет таких 3-х игроков, т.е $\forall$ 3-х игроков неверно, что их выиграли все остальные 11. ✓

2) Для одной тройки побед $3\cdot 11=33$ победы.

3) Из 11 можно составить:

~~1 с 9~~

~~8 + 7 + ... + 1~~

$9+8+\ldots+1$

~~9+8~~

Для 1 тройк: $S_9+S_8+S_7+S_6+S_5+S_4+S_3+S_2+S_1$.

4) Всего партий $S'=\frac{0+13}{2}\cdot 14=13\cdot 7=91$ партия

8б

✓ $\frac{1+9}{2}\cdot 9+\frac{1+8}{2}\cdot 8+\frac{1+7}{2}\cdot 7+\frac{1+6}{2}\cdot 6+\frac{1+5}{2}\cdot 5+\frac{1+4}{2}\cdot 4+$

$+\frac{1+3}{2}\cdot 3+\frac{1+2}{2}\cdot 2+\frac{1+1}{2}\cdot 1=\cancel{80}+45+36+28+21+15+$

$+10+6+3+1=70+51+31+7=101+64=164.$

И это только для 1-го человека из тройки.

т.о. Всего партий 91, и побед 164, что то же самое, что 164 партии. $91<164$ противоречие, значит $\exists$ такие 3 игрока