ШИФР 1109
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике Дата проведения 26.01.2020
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Капустина Полина Дмитриевна

Серия и номер паспорта 2215 469625

Дата рождения 10.01.2002 Класс 11

Школа № 15 район город Саров

Особые отметки (**Заполняется представителем оргкомитета**) о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады **обязан**:
- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады **запрещается**:
- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись (**другие записи на папке делать запрещено**).

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! *Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.*

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

капу
(подпись участника олимпиады

511. 1.

1109

$x^{10}-3x^4+x^2+1=0$

1) $x=1$, $1-3+1+1=0$; $x=1$ — корень уравнения

2) $x=-1$, $1-3+1+1=0$, $x=-1$ — корень уравнения

Найдём коэффициенты нового уравнения используя схему Горнера:

	1	0	0	0	0	0	-3	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	-2	-2	-1	-1	0
-1	1	0	1	0	1	0	-2	0	-1	0	0

1	2	3	4	5	Σ
20	16	–	4	16	56

$x^8+x^6+x^4-2x^2-1=0$

1) $x=1$; $3-3=0$, $x=1$ — корень уравнения

2) $x=-1$, $3-3=0$, $x=-1$ — корень уравнения

Найдем коэффициенты нового уравнения используя схему Горнера:

	1	0	1	0	1	0	-2	0	-1
1	1	1	2	2	3	3	1	1	0
-1	1	0	2	0	3	0	1	0	0

$x^6+2x^4+3x^2+1=0$ не имеет действительных корней, т.к.

$x^6\geq 0, 2x^4\geq 0, 3x^2\geq 0 \Rightarrow x^6+2x^4+3x^2+1\geq 1$

$(x+1)^2(x-1)^2(x^6+2x^4+3x^2+1)=x^{10}-3x^4+x^2+1$

20б

Ответ: $x=1$; $x=-1$

511. 2.

Доказать, что $\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\leq\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

1) $\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha\sqrt{\frac{\cos\alpha+1}{2}}$

Т.к. $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, то $\sin\alpha\geq 0$ и $\cos\alpha\geq 0$

Т.е. $\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\ ?\ \sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\Leftrightarrow\sin\alpha\sqrt{\frac{\cos\alpha+1}{2}}\ ?\ \sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sin^2\alpha\cdot\frac{\cos\alpha+1}{2}\ ?\ \sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$

2) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\left(\sin\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)\right)^2=$

$=\frac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{2}=\frac{1+\sin2\alpha}{2}$

3) $\dfrac{\sin^2\alpha(\cos+1)}{2} = \dfrac{\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha + \sin^2\alpha}{2}$

1) $\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha \le \sin 2\alpha$, т.к. $0 < \sin 2\alpha \le 1$, $0 < \sin\alpha \le 1$

2) $\sin^2\alpha \le 1$

$$\Downarrow$$

$$\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha + \sin^2\alpha \le \sin 2\alpha + 1$$

$$\Updownarrow$$

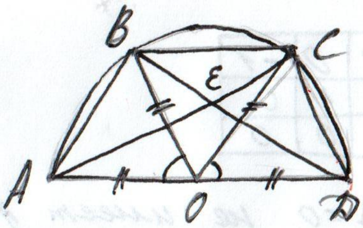
$$\frac{\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha + \sin^2\alpha}{2} \le \frac{\sin 2\alpha + 1}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2} \le \sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, ч.т.д.

16б

511.4.



Дано: $O \in AD$

$AO = BO = DO = CO$

$\angle BOA = \angle COD$

$AC \cap BD = E$

Доказать, что EO – биссектриса $\angle AED$

Решение:

1) т.к. $AO = OB = OC = OD$, то точки $A, B, C, D \in$ Окр$(O; AO)$

2) $\triangle ABO = \triangle COD$ (по углу между двумя сторонами) ? ✓

т.к. $AO = OB = OC = OD$, $\angle AOB = \angle COD$.

3) т.к. $\angle CAD = \frac{1}{2}\cup CD = \frac{1}{2}\cup BD = \angle BCD$ ($\angle BCD$ и $\angle CAD$ – вписанные)

$BC \parallel AD$,

4) $AB = CD$ (в равных треуг. против равных углов лежат равные стороны)

$$\Downarrow$$

5) $ABCD$ – равнобедренная трапеция. ?

6) E – т. пересеч. AC и $BD \Rightarrow BE = EC$, $EA = ED$?

7) $\triangle AED$ – равнобедренный

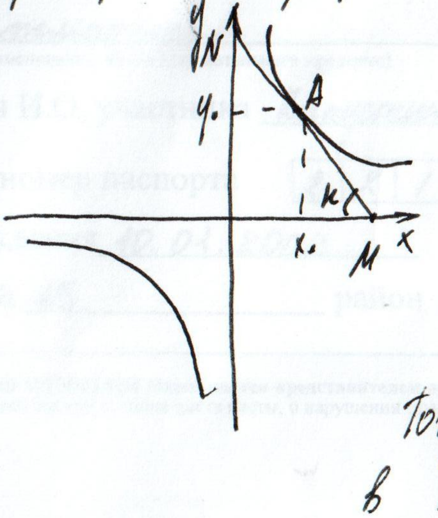
8) EO-медиана в $\triangle AED \Rightarrow$ EO-биссектриса $\angle AED$, ч.т.д.

45

№11.5

$y = 2020 : x$

Примерный график:



Возьмем точку A, координаты x_0, y_0 и проведем через неё касательную с коэффициентом k.

$y_0 = \frac{2020}{x_0}$ $\quad k = y'(x_0) = \frac{-2020}{x_0^2}$

Тогда, пусть касательная пересекает графики в точках M и N, значит мы можем найти их координаты зная x_0 и y_0.

1) $y_M = 0$, $x_M = x_0 + y_0 : k$ (т.к. $k<0$)

2) $x_N = 0$ $\quad y_N = y_0 - x_0 \cdot k$ (т.к $k<0$)

$x_M = x_0 - y_0 : k = x_0 - \frac{\left(\frac{2020}{x_0}\right)}{\left(-\frac{2020}{x_0^2}\right)} = 2x_0$; $x_M \in Z$

$y_N = y_0 - x_0 \cdot k = y_0 - \left(x_0 \cdot \left(\frac{2020}{x_0^2}\right)\right) = \frac{2020}{x_0} + \frac{2020}{x_0} = \frac{4040}{x_0} \in Z$, т.к. $y_N \in Z$

$\begin{cases} 2x_0 \in Z \\ \frac{1010}{x_0} \in Z \end{cases}$ $\quad 2x_0 \in Z$, x_0 - делитель 1010

$1010 = 101 \cdot 2 \cdot 5$

$x_0 = \{1; 2; 10; 5; 101; 202; 505; 1010; -1; -2; -5; -10; -101; -202; -505; -1010; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\}$ - 18 делителей числа 1010 удовлетворяющих условию, значит существует 18 точек, касательная, которых проходит через целые координаты.

$P_n = \frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$ дел (если они положительны)

20 делителей (если они отрицательны)

и $\frac{1}{2}$; и $-\frac{1}{2}$ - дополнительные делители, удовлетворяющие

3 лист 4з4

условием. Итого: 42 точки, в которых проведенная к ним касательная пересекает графики в целых координатах

16б.

4 лист из 4