ШИФР 1108
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по МАТЕМАТИКЕ Дата проведения 26. 01. 2020
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Лычагина Анна Александровна

Серия и номер паспорта | 2 | 2 | 1 | 6 | | 5 | 5 | 8 | 4 | 7 | 6 |

Дата рождения 02. 09. 2002 Класс 11

Школа № „Лицей №3" район ______ город Саров

Особые отметки **(Заполняется представителем оргкомитета)** о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады **обязан**:
- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

***Внимание**. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.*

Участнику олимпиады **запрещается**:
- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись (**другие записи на папке делать запрещено**).

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

***Внимание!** Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.*

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

А Лыч
(подпись участника олимпиады)

№1.

1108

$x^{10}-3x^4+x^2+1=0.$

Пусть $x^2=t$, $t\geq 0$, то

$t^5-3t^2+t+1=0.$

$t=1$ - корень уравнения.

$$\begin{array}{l|l} t^5-3t^2+t+1 & t-1 \\ \hline -\,t^5-t^4 & t^4+t^3+t^2-2t-1 \\ \quad t^4 & \\ -\,t^4-t^3 & \\ \quad t^3-3t^2 & \\ -\,t^3-t^2 & \\ \quad -2t^2+t & \\ -\,-2t^2+2t & \\ \quad -t+1 & \\ -\,-t+1 & \\ \quad 0 & \end{array}$$

$t^4+t^3+t^2-2t-1=0.$

$t=1$ - корень уравнения.

$$\begin{array}{l|l} t^4+t^3+t^2-2t-1 & t-1 \\ \hline -\,t^4-t^3 & t^3+2t^2+3t+1 \\ \quad 2t^3+t^2 & \\ -\,2t^3-2t^2 & \\ \quad 3t^2-2t & \\ -\,3t^2-3t & \\ \quad t-1 & \\ -\,t-1 & \\ \quad 0 & \end{array}$$

$t^3+2t^2+3t+1=0.$

Т.к. $t\geq 0$, то

$t^3+2t^2+3t+1>0.$

Значит, $t=1$ - ед. решение уравнения.

Т.о.,

$x^2=1$,

$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$ $x=1$, $x=-1$.

Это единственные решения уравнения.

Ответ: $x=1$, $x=-1$.

20

1	2	3	4	5	Σ
20	20	0	4	10	54

№2.

$\sin\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \leq \sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)$.

Решим это неравенство для $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

Т.к. $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$, то $\sin\alpha \geq 0$, $\cos\frac{\alpha}{2} \geq 0$, $\sin(\frac{\pi}{4}+\alpha) \geq 0$.

Следовательно, можно возвести данное ~~уравне~~ неравенство в квадрат, при данных значениях α. (т.к. обе части неотрицательны)

$$\sin^2\alpha \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2} \leq \sin^2(\frac{\pi}{4}+\alpha).$$

$$\sin^2\alpha \cdot \frac{1+\cos\alpha}{2} \leq (\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\alpha)^2.$$

$$\sin^2\alpha \cdot \frac{1+\cos\alpha}{2} \leq (\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\alpha)^2.$$

$$\sin^2\alpha \cdot \frac{1+\cos\alpha}{2} \leq \frac{1}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha)^2$$

$$\sin^2\alpha(1+\cos\alpha) \leq (\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha)$$

$$\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cdot\cos\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \leq 0.$$

$$-\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cdot\cos\alpha - 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \leq 0. \quad |\cdot(-1)$$

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cdot\cos\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \geq 0.$$

$$\cos\alpha(\cos\alpha - \sin^2\alpha + 2\sin\alpha) \geq 0.$$

Т.к. $\alpha \in [0; \frac{\pi}{4}]$, то $\cos\alpha \geq 0$. Значит,

$$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \\ \cos\alpha - \sin^2\alpha + 2\sin\alpha \geq 0 \quad (1) \end{array}\right.$$

(1) $\cos\alpha \geq \sin\alpha(\sin\alpha - 2)$.

Т.к. $\cos\alpha \geq 0$, $\cancel{\sin\alpha - 2}$ $0 \leq \sin\alpha \leq 1$, то $\sin\alpha - 2 < 0$,

$\sin\alpha(\sin\alpha - 2) \leq 0$ при $\forall\alpha: \alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

Следовательно, неравенство $\cos\alpha - \sin^2\alpha + 2\sin\alpha \geq 0$ выполняется при $\forall\alpha: \alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$

2 из 5

Значит, неравенство $\sin\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \le \sin(\frac{\pi}{4}+\alpha)$

выполняется при всех α, $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$, что

и требовалось доказать. 20б

№5.

$y = \frac{2020}{x}$.

$y' = -\frac{2020}{x^2}$.

Уравнение касательной к данному графику в точке x_0

имеет вид: $f(x) = y'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$.

Найдём абсциссы точек пересечения касательной

с осью ~~Oy~~ Ox:

$f(x)=0, \quad y'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)=0.$

$$-\frac{2020}{x_0^2}(x-x_0) + \frac{2020}{x_0} = 0.$$

$$\frac{2020}{x_0}\left(1 - \frac{x-x_0}{x_0}\right) = 0.$$

$$\frac{2020}{x_0}\left(\frac{x_0 - x + x_0}{x_0}\right) = 0.$$

$$\frac{2020(2x_0 - x)}{x_0^2} = 0.$$

Значит, $x = \cancel{x_0}\, 2x_0.$, ~~$2x_0 \in Z$. $x_0 \in Z$~~.

Т.к. $x \in Z$, то $x_0 = \frac{x}{2}$.

Найдём ординаты точек пересечения с осью Oy:

$y'(x_0)(0-x_0)+f(x_0) = f(0).$ ~~$=y_0$~~, $f(0)=y$

$$-\frac{2020}{x_0^2}(-x_0) + \frac{2020}{x_0} = \frac{2\cdot 2020}{x_0}.$$

Т.к. $f(0) \in Z$, $\frac{4040}{x_0} \in Z$.

Следовательно, $4040 \vdots x_0$.

$4040 = 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 101$.

Т.к. $x \in \mathbb{Z}$, то $x_0 = \frac{k}{2}$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Т.о., $\frac{4040 \cdot 2}{k} \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $8080 \vdots k$.

$8080 = 2 \cdot 4040 = 16 \cdot 5 \cdot 101 = 2^4 \cdot 5 \cdot 101$.

Всего целых делителей у числа 8080

$20 \; (5 \cdot 2 \cdot 2)$

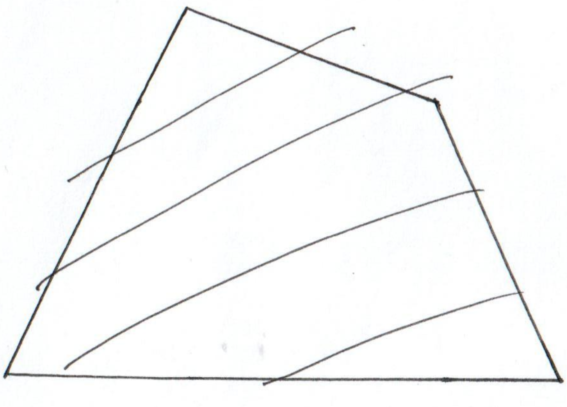
не учтены противоп. координаты.

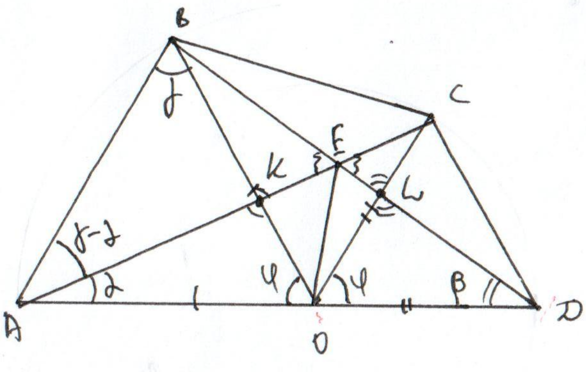
Следовательно, всего 20 таких точек

10б

Ответ: 20 точек.

№4





1) В $\triangle AOB$ $BO = AO$, $\angle BOA = \varphi$. Значит, $\triangle BOA$ – р/б,

$\angle ABO = \angle BAO = \frac{180^\circ - \varphi}{2}$.

Аналогично, $\triangle COD$ – р/б, $\angle OCD = \angle ODC = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$.

Т.о., $\angle ABO = \angle BAO = \angle OCD = \angle ODC = 90^\circ - \frac{\varphi}{2} = \gamma$.

2) Т.к. в $\triangle ABO$ и $\triangle COD$ $\angle ABO = \angle BAO = \angle OCD = \angle ODC$, то они подобны, значит, $\frac{AO}{OD} = \frac{AB}{CD}$

3) Пусть $\angle EAO = \alpha$, $\angle EDO = \beta$.

4 из 5

4) $BO \cap AC = K$, $CO \cap BD = L$.

5) $\angle AKO = 180° - \varphi - \alpha$.

$\angle BKO = 180° - \gamma - \gamma + \alpha$.

$\angle AKO + \angle BKO = 180°$.

? 4б

№3.

Всего партий сыграно: $13 \cdot 7 = 91$.

Допустим, что не нашлось такой тройки игроков, ~~каждый выиграл из каждых~~ тогда каждый из игроков выиграл не более 3 игр.

0б.

5 из 5