**ШИФР** 1122

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

# Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников

**БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ**

по МАТЕМАТИКЕ Дата проведения 26.01.2020

(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Циберева Е.К.

Серия и номер паспорта | 2 | 2 | 1 | 5 | | 4 | 6 | 9 | 9 | 5 | 8 |

Дата рождения 06.03.2002 Класс 11

Школа № 3 район ______ город Саров

**Особые отметки** **(Заполняется представителем оргкомитета)** о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

**Правила поведения**

Участник очного тура олимпиады **обязан**:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

***Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.***

Участнику олимпиады **запрещается**:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

***Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.***

**Оформление работы**

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись (**другие записи на папке делать запрещено**).

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

***Внимание!** Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.*

**С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен**

(подпись участника олимпиады)

## N 11.1.

1 1 2 2

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 20 | 8 | 16 | 10 | 74 |

$x^{10}-3x^4+x^2+1=0$

Если $x=1$, то $1-3+1+1=0$ – верно, $x=1$ – корень

Если $x=-1$, то $1-3+1+1=0$ – верно, $x=-1$ – корень

$$
\begin{array}{l|l}
x^{10}-3x^4+x^2+1 & x^2-1 \\
\underline{-\ x^{10}-x^8} & x^8+x^6+x^4-2x^2-1 \\
x^8-3x^4+x^2+1 & \\
\underline{-\ x^8-x^6} & \\
x^6-3x^4+x^2+1 & \\
\underline{-\ x^6-x^4} & \\
-2x^4+x^2+1 & \\
\underline{-\ -2x^4+2x^2} & \\
-x^2+1 & \\
\underline{-\ -x^2+1} & \\
0 &
\end{array}
$$

$x^{10}-3x^4+x^2+1=(x^2-1)(x^8+x^6+x^4-2x^2-1)$

Если $x=\pm1$, то $1+1+1-2-1=0$ – верно, $x=\pm1$ – корень.

$$
\begin{array}{l|l}
x^8+x^6+x^4-2x^2-1 & x^2-1 \\
\underline{-\ x^8-x^6} & x^6+2x^4+3x^2+1 \\
2x^6+x^4-2x^2-1 & \\
\underline{-\ 2x^6-2x^4} & \\
3x^4-2x^2-1 & \\
\underline{-\ 3x^4-3x^2} & \\
x^2-1 & \\
\underline{-\ x^2-1} & \\
0 &
\end{array}
$$

$x^{10}-3x^4+x^2+1=(x^2-1)^2(x^6+2x^4+3x^2+1)$.

Заметим, что $\underset{\geq 0}{x^6}+\underset{\geq 0}{2x^4}+\underset{\geq 0}{3x^2}+\underset{>0}{1}>0$. Значит, получим:

$(x-1)^2(x+1)^2\cdot(x^6+2x^4+3x^2+1)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$ – решения.

$x=-1, x=1$.

Ответ: $x=-1, x=1$.

+ 20б.

## N 5.

$f(x)=\frac{2020}{x}$

$f'(x_0)=\frac{2020'\cdot x_0-2020\cdot x_0'}{x_0^2}$; $f'(x_0)=-\frac{2020\cdot\cancel{x_0}}{x_0^2}$. $f'(x_0)=-\frac{2020}{x_0^2}$ – угловой коэфф. кас.

Запишем ур-ие касательной: $y=(x-x_0)\cdot f'(x_0)+f(x_0)$

$y=(x-x_0)\cdot\left(-\frac{2020}{x_0^2}\right)+\frac{2020}{x_0}$; $y=\underbrace{-\frac{2020}{x_0^2}}_{k}\cdot x+\underbrace{\frac{2\cdot2020}{x_0}}_{b}$

$y=kx+b$ $\cancel{+\frac{2\cdot2020}{x_0}}$

Пересеч. с $Oy$: $y(0)=\frac{2\cdot2020}{x_0}\in\mathbb{Z}$

Пересеч. с $Ox$: $0=-\frac{2020}{x_0^2}\cdot x+\frac{2\cdot2020}{x_0}$, $x=\frac{2\cdot2020\cdot x_0^2}{x_0\cdot2020}=\frac{2\cdot x_0}{1}\in\mathbb{Z}$

1) $\frac{2\cdot2020}{x_0}\in\mathbb{Z}$ $\quad 2\cdot2020=2\cdot10\cdot2\cdot101=2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot101=2^3\cdot5\cdot101$

$4040 : x_0$, тогда $\frac{2\cdot2020}{x_0}\in\mathbb{Z}$

Количество делителей числа: $n=(3+1)(1+1)(1+1)=$
$=4\cdot2\cdot2=16$

также возможны и числа ~~противо~~ отрицательные ($n=16$ - все положит. числа), значит, $N=2\cdot16=32$ — количество $x_0$ (т. касания), подходящих под усл. задачи

При этом для $x=2\cdot x_0$ все эти числа (32 шт) также будут давать $x\in\mathbb{Z}$. Ещё подходят $x_0=\pm\frac{5}{2}$, $x_0=\pm\frac{101}{2}$, $x_0=\pm\frac{505}{2}$

Итого: $32+6=38$

(сверху — нечётные делители 4040, снизу — 2, чтобы подходило под $x=2x_0$)

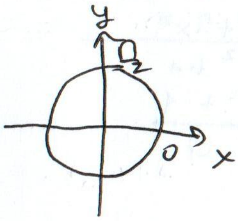
Ответ: ~~32~~ 38 точки.

10б

№12.

Д-ть: $\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\leq\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ для всех $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Д-во: т.к. $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, то $\cos\alpha\geq0$, $\sin\alpha\geq0$.




$$\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2} \vee \frac{\sqrt2}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt2}{2}\cos\alpha \quad |\cdot2$$

$$\cancel{\tfrac12\left(\sin\tfrac32\alpha+\sin\tfrac{\alpha}{2}\right) \vee \tfrac{\sqrt2}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)}$$

$$\cancel{\sin\tfrac32\alpha+\sin\tfrac{\alpha}{2} \vee \sqrt2(\sin\alpha+\cos\alpha)}$$

$$\cancel{\sin\left(\alpha+\tfrac{\alpha}{2}\right)+\sin\left(\alpha-\tfrac{\alpha}{2}\right) \vee \sqrt2(\sin\alpha+\cos\alpha)}$$

$$\cancel{\sin\alpha\cos\tfrac{\alpha}{2}+\cos\alpha\sin\tfrac{\alpha}{2}+\sin\alpha\cos\tfrac{\alpha}{2}-\cos\alpha\sin\tfrac{\alpha}{2} \vee \sqrt2(\sin\alpha+\cos\alpha)}$$

$$\cancel{2\sin\alpha\cdot\cos\tfrac{\alpha}{2} \vee \sqrt2(\sin\alpha+\cos\alpha)}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\sin^2\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} \vee \sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$$

$$\sin^2\alpha\cdot\frac{1+\cos\alpha}{2} \vee \sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right);\quad \sin^2\alpha\cdot\frac{1+\cos\alpha}{2} \vee \left(\frac{\sqrt2}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt2}{2}\cos\alpha\right)^2$$

$$\sin^2\alpha\cdot\frac{1+\cos\alpha}{2} \vee \frac{2}{4}\left(\sin^2\alpha+2\cos\alpha\cdot\sin\alpha+\cos^2\alpha\right)$$

$$\sin^2\alpha\cdot(1+\cos\alpha) \vee 1+2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cancel{\sin^2\alpha}+\sin^2\alpha\cos\alpha \vee \cancel{\sin^2\alpha}+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin^2\alpha\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha \vee \cos^2\alpha$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha\,(\sin\alpha-2) \vee \cos^2\alpha$$

$\cos^2\alpha\geq0$

$\sin\alpha-2<0$, т.к. ~~$|\sin\alpha|$~~ ~~на $\sin$~~ $|\sin\alpha|\leq1$.

поэтому $\sin\alpha\cdot\cos\alpha(\sin\alpha-2)\leq0$,
$\cos^2\alpha\geq0$, то есть

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha\,(\sin\alpha-2)\leq\cos^2\alpha$$

Значит, $\sin\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\leq\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, ч. т. д.

20б

№ 11. 3.

Всего было игр: $\frac{\cancel{14}^{7} \cdot 13}{\cancel{2}_{1}} = 7 \cdot 13 = 91$

Метод от противного: предположим, что ~~все~~ любые три игрока проиграли всем оставшимся 11 игрокам (т.е. все эти 11 выиграли). Игр между 3 и 11 игроками было $3 \cdot 11 = 33$. между 3-мя 3 игры, между 11-ю $\frac{11 \cdot 10}{2} = 55$ игр.

То есть любые 11 игроков выиграли любых трёх игроков. А такого быть не может, так как среди них обязательно найдется хотя бы ~~три~~ ~~такие~~ ~~один~~, который проиграл остальным.

Значит, наше предположение неверно, такого быть не может. Поэтому найдутся такие три игрока, что каждый из остальных 11 проиграл хотя бы одному из этой тройки

85.

№ 11.4

Дано:

ABCD – выпукл.

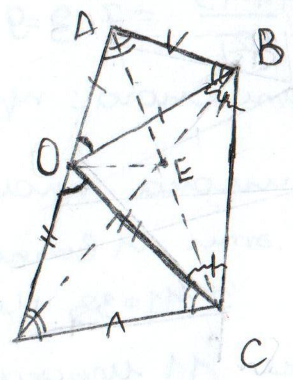
$O \in AD$.

$AO=BO$, $CO=OD$

$\angle BOA = \angle COD$

~~$AD \cap BD = E$~~ $AC \cap BD = O$

Д-ть: EO – бис-са $\angle AED$




Д-во.

1) $\triangle OAB$ – р/б, $\angle OAB = \angle OBA$

пусть $\angle AOB = \angle DOC = \alpha$, тогда $\angle OAB = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

$\triangle DOC$ – р/б, $\angle ODC = \angle OCD = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

$\triangle AOB \sim \triangle DOC$ по 3ем углам. ? ✓ Нет такого признака!

$\frac{AB}{DC} = \frac{AO}{OD}$.

$\angle BOC = 180^\circ - 2\alpha$

Заметим, что $\angle ABO = \angle ODC$, значит, около ABCD можно описать окружность. Значит,

$\angle A + \angle DCB = \angle D + \angle ABC = 180^\circ$

$\angle A = \angle D \Rightarrow \angle DCB = \angle ABC$

$\alpha + \angle OCB = \alpha + \angle OBC \Rightarrow \angle OCB = \angle OBC$,

$\triangle BOC$ – р/б, $OB = OC$.

Т.к. $OC = OD$, $BO = OA$, то $OC = OD = OB = OA$

Поэтому $\triangle AOB = \triangle ODC$ по 2м ст и углу между ними.

$AB = DC$.

В $\triangle AED$ OE – медиана ($AO = OD$). Необходимо д-ть, что $AE = ED$.

$\triangle OBD = \triangle OCA$ по 2м ст. и углу между ними ($AO = OD = BO = OC$, $\angle AOC = \angle BOD$) Отсюда $AC = DB$, $\angle OBD = \angle OCA$

т.к. $\angle OCA = \angle OBD$ и $\angle OBC = \angle OCB$ то $\angle ECB = \angle EBC$.

Отсюда $EB = EC$. Т.к. $AC = CB$, то $AE = ED$, поэтому EO – высота, и медиана и бис-са к основанию

$\triangle OBD = \triangle AOC$ по 2м ст. и углу между ними. ( $OD = OC$, $AO = OD$, $\angle ADC = \angle BOD$). Отсюда $\cancel{\angle BDA = \angle CAD}$,

$\angle CAO = \angle ODB$, $\angle ACO = \angle ODB$

Заметим, что т. к. $\angle OAE = \angle ODE$, то около $OEDC$ можно описать окружность. $\angle OEC = 180^\circ - 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$

Т. к. $\angle OAE = \angle OBE$, то около $OABE$ можно описать окружность. $\angle OEB = 180^\circ - 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$

$\angle OEC = \angle OEB$, а т. к. $\angle OEC = \angle OED + \angle DEC$,
$\angle OEB = \angle OEA + \angle AEB$ — как верт.,

то $\angle OED = \angle OEA$ →

Отсюда $EO$ — бис-са $\angle AED$, ч.т.д.

165.