ШИФР 1107
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике Дата проведения 09.03.2015
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Журбаков Д.Д

Серия и номер паспорта 2210 675731

Дата рождения 15.06.1997 Класс 11 „Б"

Школа № 15 район ______ город Саров

Особые отметки **(Заполняется представителем оргкомитета)** о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады **обязан**:
- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады **запрещается**:
- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись (**другие записи на папке делать запрещено**).

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! *Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.*

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады

Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»

Финальный тур

МАТЕМАТИКА

Шифр 1107

Задача №1	Задача №2	Задача №3	Задача №4	Задача №5	Подписи членов комиссии
~~10~~ 12	16	~~10~~ 16	16	10	70б. Грачев Гелешанский

Итого 70б

Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»

Финальный тур

МАТЕМАТИКА

1.1.

$\sqrt{14-x^2}\,(\sin x - \cos 2x) = 0$

$D(y):\ 14-x^2 \ge 0$

$x^2 \le 14$

$-\sqrt{14} \le x \le \sqrt{14}$

Важно: одно равно нулю, другое имеет смысл

1) $\begin{cases} \sin x - \cos 2x = 0 \\ -\sqrt{14} \le x \le \sqrt{14} \end{cases}$

$\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

Пусть $\sin x = t$, $|t| \le 1$, то

$2t^2 + t - 1 = 0$

$D = 1 + 2 = 3$

$\left[\begin{array}{l} t = \frac{-1+\sqrt{3}}{4} \\ t = \frac{-1-\sqrt{3}}{4} \end{array}\right.$

$\sqrt{3} \approx 1{,}7 \Rightarrow \frac{-1-1{,}7}{4} \le 1$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{-1+\sqrt{3}}{4} \\ \sin x = \frac{-1-\sqrt{3}}{4} \end{array}\right. \\ -\sqrt{14} \le x \le \sqrt{14} \end{cases}$

$\sqrt{14} \approx 3{,}8$ (Rad)

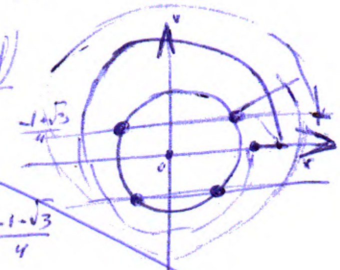
$-3{,}8 \le x \le 3{,}8$

1,57/2

0,785

3,14+0,985

4,12



2) $14 = x^2$

$\left[\begin{array}{l} x = \sqrt{14} \\ x = -\sqrt{14} \end{array}\right.$

Ответ. 12. (10)

$\sqrt{D} = 3 \Rightarrow$ $t = \frac{-1+3}{4}$, $t = \frac{-1-3}{4}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \\ t = -1 \end{array}\right. \\ |t| \le 1 \end{cases}$ $t = \frac{1}{2};\ t = -1 \Rightarrow$ 1) $\sin x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$

$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$

2) $\sin x = -1$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in Z.$

- Решения первой серии при $x \in [-\sqrt{14}; \sqrt{14}]$ только при $n = 0$.
- Т.к. $\frac{9}{2} > \sqrt{14}$
- Решение второй серии при $x \in [-\sqrt{14}; \sqrt{14}]$ только при $K = 0; -1$.
- Решение третьей серии при $x \in [-\sqrt{14}; \sqrt{14}]$ только при $m = 0$.

- Добавив корни: $-\sqrt{14}$ и $\sqrt{14}$ получаем 6 корней.

Ответ: 6 корней.

−1 2б.

Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»

Финальный тур

МАТЕМАТИКА

11.4.

N - кол-во делителей
n - порядковый номер делителя
b_n - делитель
Z - искомое число

$N = 55$

1) $\boxed{Z = b_n \cdot b_{(56-n)}}$, т.е. $Z = b_1 \cdot b_{55}$
$Z = b_2 \cdot b_{54}$
...
$Z = \ldots$

$b_1 \cdot b_3 \cdot b_{15} \ldots b_{11} = Z$

2) $b_1 = 1;\ b_{55} = Z$

$Z = b_1 \cdot Z \Rightarrow b_n = f(b_n)$

$N! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \ldots 53 \cdot 54 \cdot 55$

$\cancel{100} \cdot 20 \cdot 30 \cdot 40 \cdot 50 = 60000 \cdot 2000 = 120000000$

$Z = 55!$

11.4.

Пусть натуральное число N имеет вид:

$N = n_1^{a_1} \cdot n_2^{a_2} \cdot \ldots n_b^{a_b}$, где n - его делители (простые, различные);

след. количество натуральных делителей числа N примет вид: $(c_1+1)(c_2+1)\ldots(c_b+1)$. ?

Тогда $(c_1+1)(c_2+1)\ldots(c_b+1) = 55$

$55 = 11 \cdot 5$, след. $b=1$ или $c=2$.

1) $\begin{cases} b=1 \\ c_1 = 54 \\ N = n_1^{54} \end{cases}$

2) $\begin{cases} b=2 \\ c_1 = 4 \\ c_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow N = n_1^4 \cdot n_2^{10}$.

• Наименьшие простые числа: 1, 2 и 3

• Сравним: 2^{54} и $2^4 \cdot 3^{10}$ и $3^4 \cdot 2^{10}$

Видно, что наименьшее $3^4 \cdot 2^{10}$.

Ответ: $3^4 \cdot 2^{10}$.

-16

п.3.

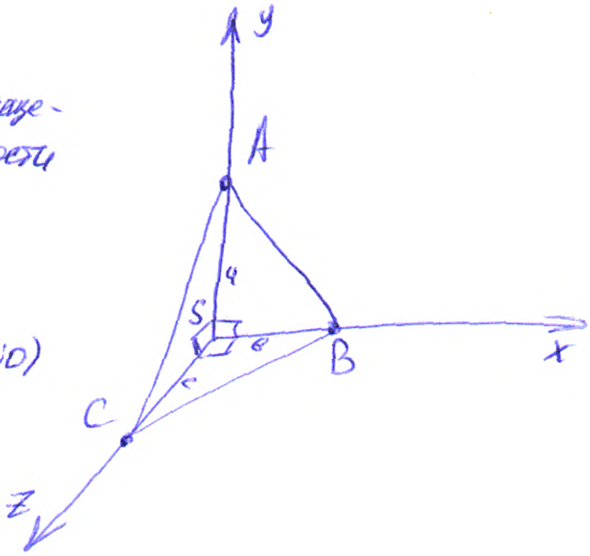
1) Поместим тетраэдр в прямоугольную систему координат (Oxyz)

• Точка S – начало координат. $S(0;0;0)$

• $A(0;a;0)$; $B(b;0;0)$; $C(0;0;c)$;

• Ур-ние плоскости: если вершины треугольника, включающегося в плоскость, лежат на осях, то ур-ние плоскости зададим в отрезках.

$$\frac{x}{b}+\frac{y}{a}+\frac{z}{c}=1$$



2). Диагональ искомого куба проходит через точку $S(0;0;0)$ и точку $S'(x_1;y_1;z_1)$.

• Т.к. куб вписанный, то $x=y=z=l_{куба}$.

$$\frac{l}{a}+\frac{l}{b}+\frac{l}{c}=1$$

$$l=\frac{1}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)};\quad l=\frac{abc}{ab+bc+ac}.$$

Ответ: $l_{куба}=\frac{abc}{ab+bc+ac}$.

+10

Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»

Финальный тур

МАТЕМАТИКА

11.2.

$x^2+2x+2|x+1|=a$

$\begin{cases} x+1\geq 0 \\ x^2+2x+2x+2-a=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq -1 \\ x^2+4x+(2-a)=0 \end{cases}$

$x^2+4x+(2-a)=0$

$\frac{D}{4}=4-(2-a)=2+a$

$D>0 \Rightarrow 2+a>0 \Rightarrow \underline{a>-2}$

$\begin{cases} x\leq -1 \\ x^2+2x-2x-2-a=0 \end{cases}$

$x^2-2-a=0$

$\left[\begin{array}{l} x=\sqrt{a+2} \\ x=-\sqrt{a+2} \end{array}\right.$, $x\leq -1$

$\begin{cases} x=-\sqrt{a+2} \\ x\leq -1 \end{cases}$ $a\geq -1$.

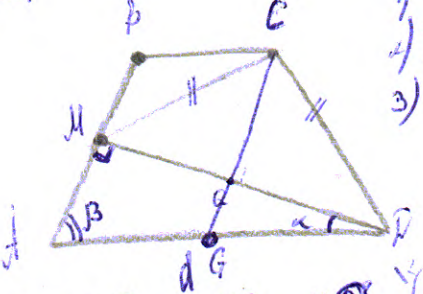
• Если во второй системе один корень, то и в первой должен быть один.

$\frac{D}{4}=0 \Rightarrow 2+a=0$ $\underline{a=-2}$

-2 -1 a

Ответ: $\underline{a\geq -1}$.

11.3.



1) $\triangle MCD$ - р/б; $\triangle AMD$ - прям; $\underline{AD=d}$.

2) Пусть $\angle MDA=\alpha$; $\angle MAD=\beta$. $\Rightarrow \underline{\alpha+\beta=90^\circ}$

3) $\left.\begin{array}{l} MD=\cos\alpha\cdot d \\ MD=\sin\beta\, d \end{array}\right\}$ $\frac{MD}{d}=\cos\alpha$

$\cos\alpha=\sin\beta \Rightarrow$

По теор. cos для $\triangle MCD$:

$MD^2=MC^2+CD^2-2\,MC\cdot CD\cdot\cos\angle MCD$

$MD^2=2MC^2-2MC^2\cos\angle MCD$

$MD^2=2MC^2(1-\cos\angle MCD)$

$\frac{1}{2}\left(\frac{MD}{MC}\right)^2=1-\cos\angle MCD$

$CQ\perp MD \Rightarrow \frac{MQ}{MC}=\frac{MD}{2MC}=\left(\frac{MD^2}{4MC^2}\right)=\frac{MD^2}{4MC^2}$

$\frac{MD^2}{2MC^2} \Leftrightarrow \frac{MD^2}{4MC^2}$ $2\cos\angle CMD=1-\cos\angle MCD$

$2\sin\frac{\angle MCD}{2}$

4) CQ, продлим до AD; то $CG\parallel AB$ (Два перп. к одной прямой MD), $GQ\parallel AM$ (отр парал. прямых); $MQ=QD \Rightarrow GQ$ - ср. лин

5) $\triangle AMD \Rightarrow AG=GD=\frac{d}{2}$; $ABCG$ - парал. $\Rightarrow BC=AG=\frac{d}{2}$.

16.

Ответ. $\frac{d}{2}$.

1.2

$x^2+2x+2|x+1|=a$

$x^2+2x=a-2|x+1|$

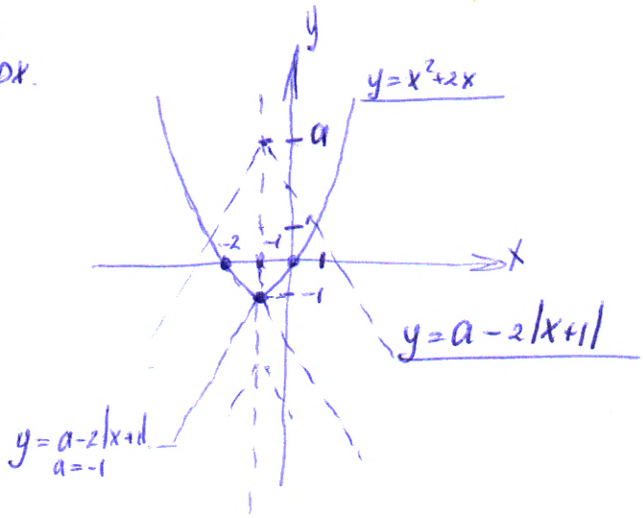
1) $y=x^2+2x$ — парабола, ветви которой направлены вверх.

$x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{-2}{2}=-1$

$y_0=(-1)^2-2\cdot1=-1$

$x_0=-1$; $y_0=-1$. – нули ф-ции.

2) $y=a-2|x+1|$



3) При $a>-1$ ур-ние имеет 2 корня;
При $a=-1$ ур-ние имеет 1 корень;
При $a<-1$ ур-ние корней не имеет.

4) При $a>-1$ $x=(\sqrt{a+2}-1)-1$,
$x=-(\sqrt{a+2}-1)-1$

$x^2+2x+2x+2-a=0$

$x^2+4x+(2-a)=0$

$\frac{D}{4}=4-(2-a)=4-2+a=\underline{2+a}$

$x_1=-2+\sqrt{2+a}$

$x_2=-2-\sqrt{2+a}$

Ответ?

+16