ШИФР 1108

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике Дата проведения 9 марта 2015г

(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Сычев Вадим Константинович

Серия и номер паспорта | 2 | 2 | 1 | 0 | | 6 | 7 | 4 | 7 | 0 | 5 |

Дата рождения 24 февраля 1997. Класс 11

Школа № МБОУ „Лицей №15" район ____________ город Саров

Особые отметки **(Заполняется представителем оргкомитета)** о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады **обязан**:
- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

***Внимание**. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.*

Участнику олимпиады **запрещается**:
- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись (**другие записи на папке делать запрещено**).

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

***Внимание!** Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.*

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады

Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»

Финальный тур

МАТЕМАТИКА

Шифр 1108

Задача №1	Задача №2	Задача №3	Задача №4	Задача №5	Подписи членов комиссии
20	20	20	20	10	Итого 90: Грачев Гегечкори

Итого 90

Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»

Финальный тур

МАТЕМАТИКА

11.1 $\sqrt{14-x^2}(\sin x-\cos 2x)=0.$

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{14-x^2}=0\\ \begin{cases}\sin x-\cos 2x=0\\ 14-x^2\geqslant 0\end{cases}\end{array}\right.$$

1) $\sqrt{14-x^2}=0.$

$x_{1,2}=\pm\sqrt{14}$

$x=\sqrt{14}$, $x=-\sqrt{14}$

2) $\begin{cases}\sin x-\cos 2x=0\\ 14-x^2\geqslant 0\end{cases}$

а) $\sin x-\cos 2x=0.$

$\sin x-\cos^2 x+\sin^2 x=0$

$\sin x-1+2\sin^2 x=0.$

$2\sin^2 x+\sin x-1=0$

Пусть $\sin x=t$, $t\in[-1;1]$

$2t^2+t-1=0$

$D=1+8=9.$

$t_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{4}$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=\frac{1}{2}\end{array}\right.\\ -1\leq t\leq 1\end{cases}$ $t=-1, t=\frac{1}{2}.$

$\sin x=-1$, $\sin x=\frac{1}{2}.$

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{3\pi}{2}+2\pi k, k\in Z.\\ x=\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z\\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi l, l\in Z.\end{array}\right.$$

б) $\begin{cases}-\sqrt{14}\leq x\leq\sqrt{14}.\\ \left\{\begin{array}{l}x=\frac{3\pi}{2}+2\pi k, k\in Z\\ x=\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z\\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi l, l\in Z.\end{array}\right.\end{cases}$

$\sqrt{14}<4$

$-\sqrt{14}>-4.$

I. $x=\frac{3\pi}{2}+2\pi k.$

$x=\frac{3\pi}{2}=\frac{3\cdot 3{,}14}{2}=1{,}57\cdot 3>4>\sqrt{14}$, не подходит.

$x<\frac{3\pi}{2}$, $x>-\frac{3\pi}{2}.$

$x=-\frac{\pi}{2}=-1{,}57$, $-\sqrt{14}<-1{,}57<\sqrt{14}$, $x=-\frac{\pi}{2}$ подходит.

$x=-\frac{5\pi}{2}=-5\cdot 1{,}57<-4<-\sqrt{14}$, не подходит.

$x>-\frac{5\pi}{2}.$

I $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$

$x = \frac{\pi}{6} = \frac{3,14}{6}$ 5 $-\sqrt{14} < \frac{3,14}{6} < \sqrt{14}$, след. подходит.

~~$x = \frac{7\pi}{6} = \frac{3,14 \cdot 7}{6} < 3,7\ (0,52 \cdot 7 = 3,64)$, $\sqrt{14} > 3,7\ (3,7^2 = 13,69)$, след. $x = \frac{7\pi}{6}$ подходит~~

$x = \frac{13\pi}{6}$ не подходит, т.к. $x < \frac{3}{2}\pi$.

$x = -\frac{11\pi}{6}$ не подходит, т.к. $x > -\frac{3}{2}\pi$.

II $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi l$

$x = \frac{5\pi}{6} = \frac{5 \cdot 3,14}{6} < 3,14$, след. $< \sqrt{14}$, след подходит.

$x = \frac{17\pi}{6}$ не подходит, т.к. $x < \frac{3}{2}\pi$

$x = -\frac{7\pi}{6} = -\frac{7}{6} \cdot 3,14 = -3,655\ldots < 3,7$, след. подходит $(14 > 3,7^2,\ 14 > 13,69)$

$x = -\frac{7\pi}{6} - 2\pi$ не подходит, $x > -\frac{3\pi}{2}$

) $x = +\sqrt{14}$

$x = -\sqrt{14}$

$x = -\frac{\pi}{2}$.

$x = \frac{\pi}{6}$

$x = \frac{5\pi}{6}$

$x = -\frac{7\pi}{6}$

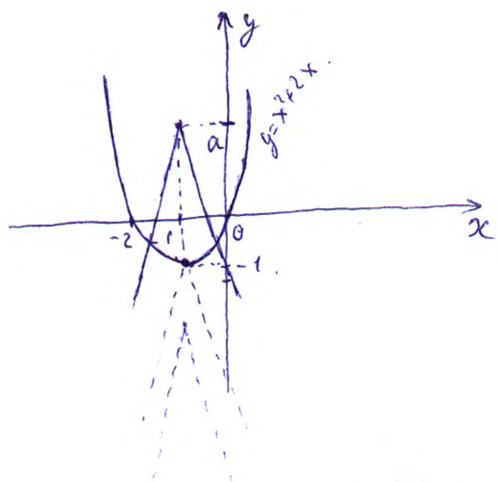
Ответ: 6 решений.

20

11.2 $x^2 + 2x + 2|x+1| = a$

$x^2 + 2x = a - 2|x+1|$

$y = x^2 + 2x$; $y = a - 2|x+1|$



1) $y = x^2 + 2x$ – парабола

$x_0 = -\frac{2}{2} = -1$.

$y_0 = -1$

x	0	-2	-1
y	0	0	-1

2) $y = a - 2|x+1|$ – уголок $y = -2|x|$, смещен на 1 клетку в отр. направлении OX и на a клеток в положительном направлении OY (1 клетка – 1ед. отрезок)

3) точки ~~кор~~ пересечения графиков – корни уравнения из графика видно, что уравнение имеет два корня только при $a > -1$, т.е при $a = -1$ 1 корень., $a < -1$ корней нет.

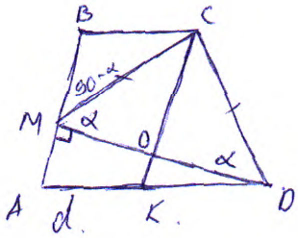
20

Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»

Финальный тур

МАТЕМАТИКА

11.3.



Дано: $ABCD$ – трапеция, $DM \perp AB$, $MC = CD$.
$AD = d$.
Найти: BC

Решение: 1) $CK \parallel AB$.
т.к. $BC \parallel AD$ ($ABCD$ – трапеция), $BA \parallel CK$, то $AK = BC$

2) Пусть $\angle CMD = \alpha$, тогда.
$\angle CDM = \alpha$ ($CD = MC$ $\triangle MCD$ – Р/Б)
$\angle MCD = 180 - 2\alpha$.
$\angle CMB = 90 - \alpha$, но $BA \parallel CK$, MC – секущая, след.
$\angle BMC = \angle MCK = 90 - \alpha$.

$\angle MCD = 180 - 2\alpha$, $\angle BMC = 90 - \alpha$., след.
CK – бис. $\angle MCD$; $\triangle MCD$ – Р/Б, след.
$CK \perp MD$, $MO = OD$

3) $\triangle MDA$: $MO = OD$.
$AM \perp MD$, $OK \perp MD$ $\}$ $AM \parallel OK$ $\}$ OK – сред. лин. $\triangle AMD$, $AK = KD = \frac{d}{2}$, след. $BC = \frac{d}{2}$.

20

Ответ: $\frac{d}{2}$.

11.4. 1) Т.к. делителей нечетное кол-во, то число – квадрат.

2) Пусть число $= A$. $A = x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}$.

3) Количество делителей числа: $(n_1+1)\cdot(n_2+1)\cdot\ldots\cdot(n_c+1) = 55$.

а) $11 \cdot 5 = (n_1+1)\cdot(n_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_k+1)$ | б) $(54+1) = (n_1+1)$, $n_1 = 54$, наименьшее $A = 2^{54}$ $(x_1 \in N)$, т.к. $1 < x$, $2 < 3$.

Т.к. 11; 5 – простые числа, то справа два множителя (т.к. $n_1, n_2, \ldots, n_c \in N$)

$11 \cdot 5 = (n_1+1)\cdot(n_2+1)$ получаем, что одна из скобок равна 11, другая 5

$n_1 + 1 = 11$, след. $n_1 = 10$

$n_2 + 1 = 5$, $n_2 = 4$.

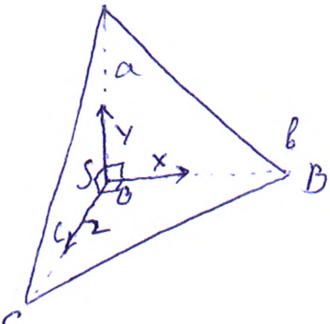
$A = x_1^{10} \cdot x_2^4$; $x_1, x_2 \in N$; $x_1, x_2 \neq 1$, $x_1 \neq x_2$.

Получаем наименьшее число $A = 2^{10} \cdot 3^4$, т.к. 2 и 3 – наим. N числа неравные 1,
$2^{10} \cdot 3^4 < 3^{10} \cdot 2^4$, $2^{10} \cdot 3^4 < 2^{54}$ $(3^4 < 2^{44})$

20

Ответ: $2^{10} \cdot 3^4$

11.5. Дано: $SA=a$, $SB=b$, $SC=c$.



а) Зададим прямоугольную систему координат, S - начало

$d + nx + ly + kz = 0$, $B(b;0;0)$ $C(0;0;c)$ $A(0;a;0)$

$$\begin{cases} bn + d = 0 \\ kc + d = 0 \\ al + d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} n = -\dfrac{d}{b} \\ k = \dfrac{-d}{c} \\ l = \dfrac{-d}{a} \end{cases}$$

$$\frac{-d}{a}y - \frac{d}{b}x - \frac{d}{c}z = -d$$

$\dfrac{y}{a} + \dfrac{x}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$, $\dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{a} + \dfrac{z}{c} = 1$ | уравнение плоскости в отрезках

Диагональ ~~квадрата~~ куба, проходящая через т. S. (начало координат) на концах имеет координаты $S(0;0;0)$, $D(x_1, y_1, z_1)$, но т.к. мы вписываем ~~квадрат~~ куб, то $x = y = z = d_{куба}$

$$\frac{d_{куба}}{a} + \frac{d_{куба}}{b} + \frac{d_{куба}}{c} = 1.$$

$$d_{куба} = 1 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right), \quad d_{куба} = \frac{abc}{ab + bc + ac}$$

10