

49-ая Выездная физико- математическая олимпиада МФТИ (НИУ)

Сборник задач и решений

Составил Астахов С.И.
МФТИ (НИУ)
2010г.



Предисловие.

В данном сборнике представлены 12 задач по физике и 12 задач по математике, каждая из которых имеет подробное решение. После решения каждой задачи даны комментарии автора о различных идеях, полезных и небезынтересных фактах, использованных в решении. Для некоторых задач приведены различные методы их решения.

Нумерация задач производится следующим образом. Вначале указывается первая буква предмета, по которому представлена задача – физика «**Ф**» и математика «**М**». Далее следуют две цифры, представляющие вместе собой число – номер класса, в котором предлагалась эта задача, т.е. в десятом «**10**» или в одиннадцатом «**11**». Далее – номер варианта, в котором была представлена эта задача – соответственно в первом («**1**») или втором («**2**»). И, наконец, последняя цифра обозначает порядковый номер задачи в варианте – «**1**», «**2**» или «**3**».

В начале приведены непосредственно варианты, которые увидели школьники, а уже после даны их решения.

Условия задач.

10 класс, вариант 1

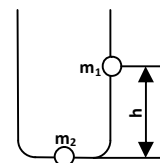
М1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 + 12z - 15y = 94; \\ 2x^2 + z^2 - 20y = 34; \\ 2x^2 - y^2 - 14x - 5y = -50. \end{cases}$$

М2. Около окружности радиуса $R = 1\text{ см}$ описана равнобокая трапеция, площадь которой $S_{\text{трап}}$ равна 5 см^2 . Найдите площадь четырёхугольника, вершинами которого служат точки касания окружности и трапеции.

М3. Решите уравнение $f(f(\dots f(x) \dots)) = 0$, где $f(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 24$.

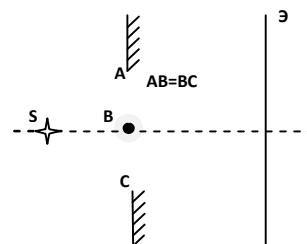
Ф1. По изогнутой спице могут без трения скользить шарики массами m_1 и m_2 . Изначально покоящийся шарик массой m_2 расположен на горизонтальном отрезке спицы, а шарик массой m_1 – на вертикальном отрезке спицы так, как показано на рисунке. Затем шарик массой m_1 отпускают без начальной скорости. При неупругом соударении шарики слипаются, и выделяется количество теплоты Q .



- 1) Найдите высоту h .
- 2) Найдите максимальную высоту h_{max} , на которую поднимутся слипшиеся шарики.

Ф2. В цилиндре под поршнем находятся воздух, пар и вода. После увеличения объёма цилиндра под поршнем в 5 раз количество молекул пара увеличилось на 20%, пар стал ненасыщенным. Какой стала относительная влажность воздуха под поршнем? Считайте, что температура в цилиндре поддерживается постоянной.

Ф3. В непрозрачной ширме имеется круглое отверстие. За ширмой стоит экран Э, а перед ней находится точечный источник света S , как показано на рисунке. Сначала в отверстие помещают тонкую собирающую линзу. Затем в отверстие помещают тонкую рассеивающую линзу. В обоих случаях линза полностью закрывает собой отверстие. Фокусные расстояния линз одинаковы. Определить отношение площадей светлых пятен, полученных на экране в первом и втором случаях, если расстояние от точечного источника света S до ширмы в 3 раза больше фокусного расстояния линзы, а расстояние от ширмы до экрана в 5 раз больше фокусного.



10 класс, вариант 2

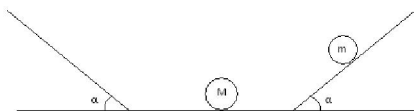
М1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 - z^2 - 10y = -121; \\ 3x^2 + 4y^2 - 2z^2 + 16x = 81; \\ 2x^2 + 2y^2 - 28z = -83. \end{cases}$$

М2. Около окружности описана равнобокая трапеция, площадь которой $S_{\text{трап}}$ равна 27см^2 . Найдите радиус окружности, если известно, что площадь четырёхугольника $S_{\text{чг}}$, вершинами которого являются точки касания окружности и трапеции, равна $1,5\text{см}^2$.

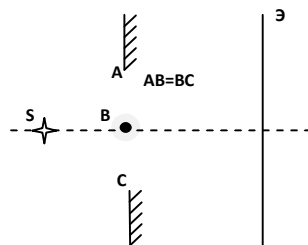
М3. Решите уравнение $f(f(\dots f(x) \dots)) = 0$, где $f(x) = x^4 + 16x^3 + 96x^2 + 256x + 252$.

Ф1. Шарик массой m удерживается на наклонной плоскости, шарик массой M покоится на горизонтальной плоскости так, как показано на рисунке. Затем шарик массой m отпускают без начальной скорости. При неупругом соударении шарики слипаются, и выделяется количество теплоты Q . Определить отношение пути l_1 , пройденного первым шариком по наклонной плоскости, к пути l_2 , пройденного шариками вместе по второй наклонной плоскости до остановки. Вращательными эффектами пренебречь, поверхности наклонных плоскостей и горизонтальной плоскости считать гладкими.



Ф2. В цилиндре под поршнем находятся воздух, пар и вода. После увеличения объёма цилиндра под поршнем количество молекул пара увеличилось на 40%, пар стал ненасыщенным. Определить, на сколько увеличили объём, если известно, что относительная влажность воздуха после увеличения объёма составила 20%. Считайте, что температура в цилиндре поддерживается постоянной, начальный объём цилиндра V_0 .

Ф3. В непрозрачной ширме имеется круглое отверстие. За ширмой стоит экран Э, а перед ней находится точечный источник света S , как показано на рисунке. Сначала в отверстие помещают тонкую собирающую линзу. Затем в отверстие помещают тонкую рассеивающую линзу, а экран сдвигают по оси линзы. В обоих случаях линза полностью закрывает собой отверстие. Фокусные расстояния линз одинаковы и равны F . Известно, что площади световых пятен, полученных на экране в первом и во втором случаях, одинаковы. Найдите расстояние от экрана до линзы в случае, когда линза рассеивающая, если известно, что в случае собирающей линзы расстояние от источника S до линзы равно $2F$, расстояние от линзы до экрана равно $8F$. В каждом из случаев ширма и источник остаются на месте.



11 класс, вариант 1

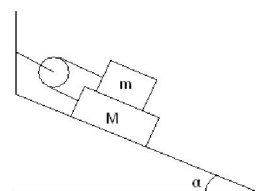
М1. Решите уравнение

$$(\sin x + \sqrt{3} \cos x) \cdot \sin 3x = \log_2 4.$$

М2. Найдите все значения параметра p , при которых вершины двух парабол $y = x^2 + 4px - p$ и $y = -px^2 + 4x + p + 2$ лежат по одну сторону от прямой $y = -3$.

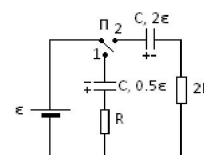
М3. Плоскость, проведённая через центр шара, вписанного в конус, параллельна плоскости основания и делит объём конуса пополам. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

Ф1. К концам нити, перекинутой через невесомый блок, привязаны бруски с массами m и $M = 4m$, находящиеся на гладкой наклонной плоскости с углом наклона к горизонту $\alpha = 30^\circ$. При каком минимальном значении коэффициента трения скольжения между брусками они будут покоиться относительно земли? Нить считайте невесомой и нерастяжимой.



Ф2. Рабочим телом тепловой машины является двухатомный идеальный газ. Машина совершает работу по циклу $1 - 2 - 3 - 1$, состоящего из изобарического расширения $1 - 2$, участка $2 - 3$ линейной зависимости давления от объёма и адиабатического сжатия $3 - 1$. Известно, что в процессе $1 - 2$ газ совершает работу A_{12} , а в процессе $2 - 3$ над газом совершается работа A_{23} . Точки 2 и 3 на PV -диаграмме лежат на прямой, проходящей через начало координат. Найдите КПД η данной тепловой машины.

Ф3. В электрической схеме, изображённой на рисунке, переключатель Π изначально разомкнут, конденсаторы заряжены. Сначала переключатель Π замыкают в положение 1. В момент времени $t = \tau$, когда ток через конденсатор становится равным нулю, переключатель Π замыкают в положение 2. Определите отношение теплоты Q_1 , выделившейся на резисторе сопротивлением R , к теплоте Q_2 , выделившейся на резисторе сопротивлением $2R$. Внутренним сопротивлением батареи можно пренебречь.



11 класс, вариант 2

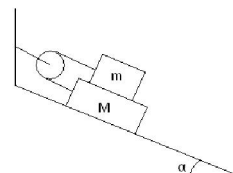
М1. Решите уравнение

$$\sin^2 4x + \cos^2 x = 2 \cdot \sin 4x \cdot \cos^4 x.$$

М2. Найдите все значения параметра p , при которых вершины двух парабол $y = x^2 - 2(p + 1)x + 1$ и $y = px^2 - x + p$ лежат по разные стороны от прямой $y = \frac{3}{4}$.

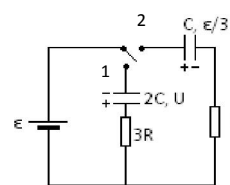
М3. На высоте конуса как на диаметре построена сфера. Площадь части поверхности сферы, лежащей вне конуса, равна площади основания конуса. Найдите угол в осевом сечении конуса.

Ф1. Бруски с массами m и $M = 2m$ привязаны к концам нити, перекинутой через блок. Система находится на наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 60^\circ$. При каком минимальном значении коэффициента трения μ между нижним бруском и наклонной плоскостью бруски будут покоиться? Трением между брусками можете пренебречь.



Ф2. Рабочим телом тепловой машины является двухатомный идеальный газ. Машина совершает работу по циклу $1 - 2 - 3 - 1$, состоящего из адиабатического сжатия $1 - 2$, изотермического расширения $2 - 3$ и участка $3 - 1$ линейной зависимости давления газа от объёма. Известно, что на участке $1 - 2$ совершается работа сжатия A_{12} ($A_{12} > 0$), а вся работа за цикл равна A . Точки 3 и 1 на PV -диаграмме лежат на прямой, проходящей через начало координат. Найдите работу A_{23} , которую совершил газ в процессе изотермического расширения.

Ф3. В электрической схеме, изображённой на рисунке, переключатель Π разомкнут, конденсаторы заряжены. Сначала переключатель Π замыкают в положение 1. В момент времени $t = \tau$, когда ток через конденсатор становится равным нулю, переключатель Π замыкают в положение 2. Известно, что отношение теплоты Q_1 , выделившейся на резисторе сопротивлением $3R$, к теплоте Q_2 , выделившейся на резисторе сопротивлением R , равно $7/6$. Определите величину начального напряжения U на конденсаторе 1, если в начальный момент времени знак заряда на его нижней пластине положителен. Внутренним сопротивлением батареи можно пренебречь.



Решения.

Математика.

М1011. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 + 12z - 15y = 94; \\ 2x^2 + z^2 - 20y = 34; \\ 2x^2 - y^2 - 14x - 5y = -50. \end{cases}$$

Решение. Сложим 3-е и 2-е уравнения и вычтем из полученного 1-ое уравнение, получим:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12z - 10y - 14x = -110 \Rightarrow (x - 7)^2 + (y - 5)^2 + (z - 6)^2 = 0.$$

Сумма квадратов равна нулю только если каждое слагаемое равно нулю, т.е.

$$x = 7; y = 5; z = 6.$$

Данная тройка чисел удовлетворяет системе, т.е. является её ответом. Других решений не существует, поскольку иначе они бы удовлетворяли уравнению, полученному нами преобразованиями, не меняющими количество решений системы и не меняющими сами решения.

Ответ: (7;5;6).

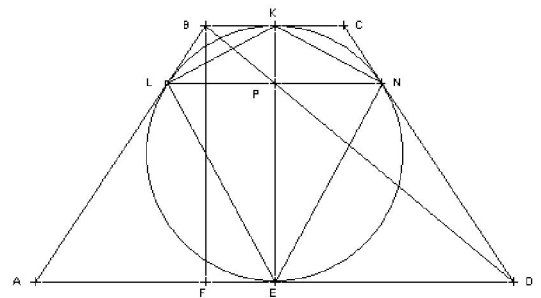
М1012. Около окружности радиуса $R = 1$ см описана равнобокая трапеция, площадь которой $S_{\text{трап}}$ равна 5 см^2 . Найдите площадь четырёхугольника, вершинами которого служат точки касания окружности и трапеции.

Решение. Обозначим $AD = a$, $BC = b$, L, K, N, E – точки касания окружности и трапеции. Заметим, что

$$BK = BL = CK = CN, \quad AL = AE = ED = DN;$$

$$\frac{DN}{DC} = \frac{DE}{DE + CK} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b} = \frac{a}{a + b};$$

$$\frac{AL}{AB} = \frac{AE}{AE + BL} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b} = \frac{a}{a + b}.$$



Следовательно, $LN \parallel AD$.

Пусть P – точка пересечения отрезка LN и диагонали BD . Тогда заметим, что $\triangle DBC \sim \triangle DPN$. Составим отношения:

$$\frac{BC}{PN} = \frac{DC}{DN} \Rightarrow PN = BC \cdot \frac{DN}{DC} = \frac{ab}{a + b}.$$

Аналогично находим, что

$$PL = \frac{ab}{a + b}.$$

Из рисунка видно, что

$$LN = LP + PN = \frac{2ab}{a + b}.$$

Так как $LN \parallel AD$, то $KE \perp LN \Rightarrow S_{LKNE} = \frac{1}{2}LN \cdot KE = \frac{abh}{a+b}$, где h – высота трапеции. Заметим, что $h = 2r = 2$.

Рассмотрим $\triangle ABF$. Выразим из него высоту по теореме Пифагора:

$$h = \sqrt{\frac{1}{4}(a+b)^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2} = \sqrt{ab} \Rightarrow ab = h^2 = 4.$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a+b)h \Rightarrow a+b = \frac{2S_{ABCD}}{h} = 5.$$

Тогда

$$S_{LKNE} = \frac{abh}{a+b} = \frac{4 \cdot 2}{5} = \frac{8}{5} = 1,6.$$

Ответ: $S_{LKNE} = 1,6$.

М1013. Решите уравнение $f(f(\dots f(x) \dots)) = 0$, где $f(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 24$.

Решение. Заметим, что:

$$x^3 + 9x^2 + 27x + 24 = (x^3 + 9x^2 + 27x + 27) - 3 = (x+3)^3 - 3.$$

Тогда:

$$f(f(x)) = (x+3)^9 - 3;$$

$$f(f(f(x))) = (x+3)^{27} - 3;$$

$$f(f(f(f(x)))) = (x+3)^{81} - 3;$$

⋮

$$\overbrace{f(\dots f(x) \dots)}^n = (x+3)^{3^n} - 3.$$

Решая уравнение $(x+3)^{3^n} = 3$, получим $x = 3^{\frac{1}{3^n}} - 3$.

Ответ: $x = 3^{\frac{1}{3^n}} - 3$.

М1021. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 - z^2 - 10y = -121; \\ 3x^2 + 4y^2 - 2z^2 + 16x = 81; \\ 2x^2 + 2y^2 - 28z = -83. \end{cases}$$

Решение. Сложим 1-е и 3-е уравнения и вычтем 2-е, получим:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10y - 28z - 16x = -285;$$

$$(x - 8)^2 + (y - 5)^2 + (z - 14)^2 = 0.$$

Сумма квадратов равна нулю только если каждое слагаемое равно нулю, т.е.

$$x = 8; y = 5; z = 14.$$

Данная тройка чисел не удовлетворяет системе, поэтому заключаем, что решений данная система не имеет. Других решений не существует, поскольку иначе они бы удовлетворяли уравнению, полученному нами преобразованиями, не меняющими количество решений системы и не меняющими сами решения.

Ответ: решений нет.

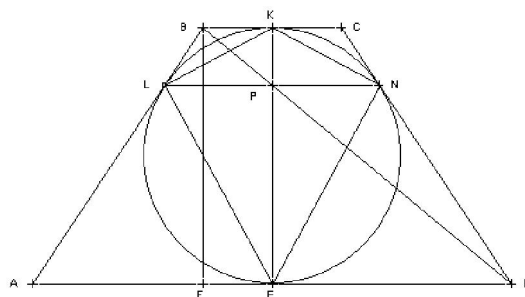
М1022. Около окружности описана равнобокая трапеция, площадь которой $S_{\text{трап}}$ равна 27см^2 . Найдите радиус окружности, если известно, что площадь четырёхугольника $S_{\text{чг}}$, вершинами которого являются точки касания окружности и трапеции, равна $1,5\text{см}^2$.

Решение. Обозначим $AD = a$, $BC = b$, L, K, N, E – точки касания окружности и трапеции. Заметим, что

$$BK = BL = CK = CN, \quad AL = AE = ED = DN.$$

$$\frac{DN}{DC} = \frac{DE}{DE + CK} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b} = \frac{a}{a + b};$$

$$\frac{AL}{AB} = \frac{AE}{AE + BL} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b} = \frac{a}{a + b}.$$



Следовательно: $LN \parallel AD$.

Пусть P – точка пересечения отрезка LN и диагонали BD . Тогда заметим, что $\triangle DBC \sim \triangle DPN$. Составим отношения:

$$\frac{BC}{PN} = \frac{DC}{DN} \Rightarrow PN = BC \cdot \frac{DN}{DC} = \frac{ab}{a + b}.$$

Аналогично находим, что

$$PL = \frac{ab}{a + b}.$$

Из рисунка видно, что

$$LN = LP + PN = \frac{2ab}{a + b}.$$

Так как $LN \parallel AD$, то $KE \perp LN \Rightarrow S_{\text{чг}} = \frac{1}{2}LN \cdot KE = \frac{abh}{a+b}$, где h – высота трапеции. Заметим, что $h = 2r$, т.е. $r = \frac{h}{2}$.

Рассмотрим $\triangle ABF$. Выразим из него высоту по теореме Пифагора:

$$h = \sqrt{\frac{1}{4}(a+b)^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2} = \sqrt{ab} \Rightarrow ab = h^2;$$

$$S_{\text{трап}} = \frac{1}{2}(a+b)h \Rightarrow a+b = \frac{2S_{\text{трап}}}{h}.$$

Тогда

$$S_{\text{чг}} = \frac{abh}{a+b} = \frac{h^2 \cdot h}{\frac{2S_{\text{трап}}}{h}} = \frac{h^4}{2S_{\text{трап}}} \Rightarrow h = \sqrt[4]{2S_{\text{трап}} \cdot S_{\text{чг}}} = 3 \Rightarrow r = 1,5.$$

Ответ: $r = 1,5$.

М1023. Решите уравнение $f(f(\dots f(x) \dots)) = 0$, где $f(x) = x^4 + 16x^3 + 96x^2 + 256x + 252$.

Решение. Заметим, что

$$x^4 + 16x^3 + 96x^2 + 256x + 252 = (x+4)^4 - 4.$$

Тогда:

$$f(f(x)) = (x+4)^{16} - 4;$$

$$f(f(f(x))) = (x+4)^{64} - 4;$$

$$f(f(f(f(x)))) = (x+4)^{256} - 4;$$

\vdots

$$\overbrace{f(\dots f(x) \dots)}^n = (x+4)^{4^n} - 4.$$

Решая уравнение $(x+4)^{4^n} = 4$, получим $x = 4^{\frac{1}{4^n}} - 4$.

Ответ: $x = 4^{\frac{1}{4^n}} - 4$.

М1111. Решите уравнение

$$(\sin x + \sqrt{3} \cos x) \cdot \sin 3x = \log_2 4.$$

Решение.

$$(\sin x + \sqrt{3} \cos x) \cdot \sin 3x = \log_2 4 \Leftrightarrow 2 \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) \cdot \sin 3x = 2 \Leftrightarrow 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \sin 3x = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) - \cos \left(4x + \frac{\pi}{3} \right) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) = 1; \\ \cos \left(4x + \frac{\pi}{3} \right) = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

М1112. Найдите все значения параметра p , при которых вершины двух парабол $y = x^2 + 4px - p$ и $y = -px^2 + 4x + p + 2$ лежат по одну сторону от прямой $y = -3$.

Решение. Вершины парабол лежат по одну сторону от прямой $y = -3$ тогда и только тогда, когда числа $y_1 + 3$ и $y_2 + 3$, где y_1 и y_2 - ординаты вершин парабол, имеют одинаковый знак, т.е.

$$(y_1 + 3)(y_2 + 3) > 0.$$

Чтобы найти y_1 и y_2 , воспользуемся методом выделения полного квадрата. Получим

$$y = (x^2 + 4px + 4p^2) - p - 4p^2$$

и

$$y = -p \left(x^2 - 2 \cdot \frac{2x}{p} + \frac{4}{p^2} \right) + p + 2 + \frac{4}{p}.$$

Отсюда следует, что

$$y_1 = -p - 4p^2 = -p(4p + 1) \text{ и } y_2 = p + 2 + \frac{4}{p} = \frac{p^2 + 2p + 4}{p}.$$

Поставляя выражения для y_1 и y_2 в левую часть первого неравенства, получим и решим неравенство:

$$(-p(4p + 1) + 3) \left(\frac{p^2 + 2p + 4}{p} + 3 \right) > 0;$$

$$\frac{(4p^2 + p - 3)(p^2 + 5p + 4)}{p} < 0;$$

$$\frac{(p + 1) \left(p - \frac{3}{4} \right) (p + 1)(p + 4)}{p} < 0.$$



С помощью метода интервалов (см.рисунок) найдём искомые значения p .

Ответ: $(-\infty; -4) \cup \left(0; \frac{3}{4} \right).$

M1113. Плоскость, проведённая через центр шара, вписанного в конус, параллельна плоскости основания и делит объём конуса пополам. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

Решение. Пусть O' – центр вписанного в конус шара, R – радиус основания конуса, r – радиус шара. По свойству конуса точка O' лежит на его оси, BO – биссектриса ΔPBK . Пусть шар касается образующей OB конуса в точке H . Тогда $O'H = r$ – высота треугольника $BO'S$.

Тогда можно записать выражения для объёмов:

$$V = V_{ABC} = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot OB; \quad V_1 = V_{BSL} = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{r}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right)^2 \cdot O'B.$$

Из треугольника $HO'S$ имеем:

$$O'S = \frac{O'H}{\cos \angle HO'S} = \frac{r}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

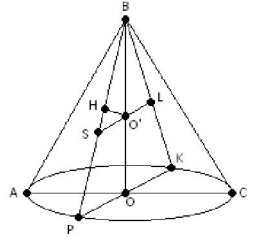
Заметим, что $\Delta PBO \sim \Delta SBO'$, тогда:

$$\frac{OB}{O'B} = \frac{O'B + r}{O'B} = 1 + \frac{r}{O'B} = \frac{R}{\frac{r}{\cos \frac{\alpha}{2}}} \Rightarrow \frac{r}{O'B} = \frac{R}{\frac{r}{\cos \frac{\alpha}{2}}} - 1;$$

$$\frac{V}{V_1} = \frac{\frac{1}{3} \pi R^2 \cdot OB}{\frac{1}{3} \pi \left(\frac{r}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right)^2 \cdot O'B} = \frac{R^3}{\left(\frac{r}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right)^3} = 2 \Rightarrow \frac{R}{\frac{r}{\cos \frac{\alpha}{2}}} = \sqrt[3]{2}.$$

Заметим, что $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{r}{\cos \frac{\alpha}{2}}}{O'B}$, где α – искомый угол. Тогда с учётом двух последних равенств получаем, что $\alpha = 2 \arcsin(\sqrt[3]{2} - 1)$.

Ответ: $\alpha = 2 \arcsin(\sqrt[3]{2} - 1)$.



М1121. Решите уравнение

$$\sin^2 4x + \cos^2 x = 2 \cdot \sin 4x \cdot \cos^4 x.$$

Решение.

1-ый способ. Запишем уравнение в виде

$$\sin^2 4x - 2 \cdot \sin 4x \cdot \cos^4 x + \cos^2 x = 0.$$

Прибавляя и вычитая в левой части полученного уравнения $\cos^8 x$, преобразуем это уравнение к виду

$$(\sin 4x - \cos^2 x)^2 + \cos^2 x (1 - \cos^6 x) = 0.$$

Последнее равенство является верным в том и только в том случае, когда верны равенства

$$\begin{cases} \sin 4x - \cos^2 x = 0; \\ \cos^2 x (1 - \cos^6 x) = 0. \end{cases}$$

Тогда получим совокупность двух систем:

$$\begin{cases} \begin{cases} \sin 4x - \cos^2 x = 0; \\ \cos x = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} \sin 4x - \cos^2 x = 0; \\ |\cos x| = 1. \end{cases} \end{cases}$$

Если $\cos x = 0$, то $\sin 4x = 0$, и первая система в совокупности имеет решения $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, которые являются решениями исходного уравнения.

Вторая система в совокупности не имеет решений, т.к. условие $|\cos x| = 1$ требует выполнения условия $\sin x = 0$ и $\sin 4x = 0$.

2-ой способ. Решив исходное уравнение как квадратное относительно $\sin 4x$, получим

$$\sin 4x = \cos^4 x \pm \sqrt{\cos^2 x (\cos^6 x - 1)}.$$

Из последнего равенства следует, что исходное уравнение имеет решения в том и только в том случае, когда $\cos^2 x (\cos^6 x - 1) \geq 0$, т.е. при условии, что хотя бы одно из равенств $\cos x = 0, |\cos x| = 1$ является верным.

Если $\cos x = 0$, то получим, что $\sin 4x = 0$. Числа $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ являются решениями исходного уравнения. Если же $|\cos x| = 1$, то из выражения для синуса $\sin 4x = 1$, но из основного тригонометрического тождества следует $\sin x = 0$ и $\sin 4x = 0$. Это заканчивает наше решение.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

М1122. Найдите все значения параметра p , при которых вершины двух парабол $y = x^2 - 2(p+1)x + 1$ и $y = px^2 - x + p$ лежат по разные стороны от прямой $y = \frac{3}{4}$.

Решение. Вершины парабол лежат по разные стороны от прямой $y = \frac{3}{4}$ тогда и только тогда, когда числа $y_1 - \frac{3}{4}$ и $y_2 - \frac{3}{4}$, где y_1 и y_2 – ординаты вершин парабол, имеют разные знаки, т.е.

$$\left(y_1 - \frac{3}{4}\right)\left(y_2 - \frac{3}{4}\right) < 0.$$

Чтобы найти y_1 и y_2 , воспользуемся методом выделения полного квадрата. Получим

$$y = x^2 - 2(p+1)x + (p+1)^2 + 1 - (p+1)^2$$

и

$$y = r \left(x^2 - 2 \cdot \frac{x}{2p} + \frac{1}{4p^2} \right) + p - \frac{1}{4p}.$$

Отсюда следует, что

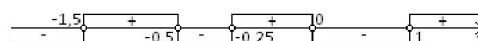
$$y_1 = 1 - (p+1)^2 = -p^2 - 2p, y_2 = p - \frac{1}{4p} = \frac{4p^2 - 1}{4p}.$$

Подставляя выражения для y_1 и y_2 в левую часть неравенства, получаем

$$\left(-p^2 - 2p - \frac{3}{4}\right) \left(\frac{4p^2 - 1}{4p} - \frac{3}{4}\right) < 0;$$

$$\frac{(4p^2 + 8p + 3)(4p^2 - 3p - 1)}{p} > 0.$$

$$\frac{\left(p + \frac{3}{2}\right) \left(p + \frac{1}{2}\right) \left(p + \frac{1}{4}\right) (p - 1)}{p} > 0.$$



С помощью метода интервалов (см. рисунок) найдём искомые значения p .

Ответ: $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}; 0\right) \cup (1; +\infty)$.

М1123. На высоте конуса как на диаметре построена сфера. Площадь части поверхности сферы, лежащей вне конуса, равна площади основания конуса. Найдите угол в осевом сечении конуса.

Решение. Осевое сечение конуса – равнобедренный треугольник ABC , высота которого BD равна диаметру сферы.

Пусть R – радиус сферы, O – её центр, 2α – искомый угол.

Тогда $\angle DBC = \angle OPB = \angle LPD = \alpha$ (L и P – точки пересечения окружности с центром в точке O радиуса R со сторонами BC и BA треугольника ABC), $OP = R$.

Пусть S_1 и S_2 – площадь основания конуса и площадь части поверхности сферы (шарового сегмента), лежащей вне конуса, соответственно. Тогда

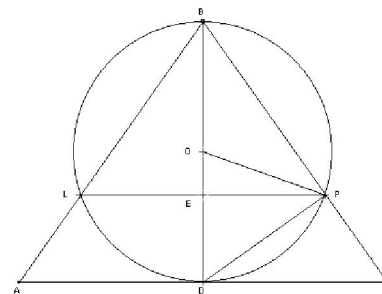
$$S_1 = \pi \cdot DC^2,$$

где $DC = BD \cdot \operatorname{tg} \alpha = 2R \cdot \operatorname{tg} \alpha$, т.е. $S_1 = 4\pi R^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$.

$S_2 = 2\pi R \cdot BE$, где $BE = BP \cdot \cos \alpha = 2R \cdot \cos^2 \alpha$, т.е. $S_2 = 4\pi R^2 \cos^2 \alpha$.

По условию $S_1 = S_2$, откуда $\operatorname{tg}^2 \alpha = \cos^2 \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha = \cos \alpha$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), или $\cos^2 \alpha - \sin \alpha = 0$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Ответ: $\alpha = 2 \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

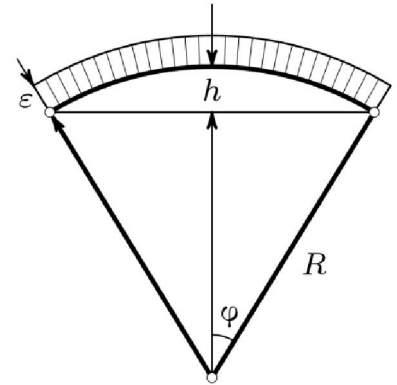


Примечание. В задаче для нахождения площади части поверхности сферы, находящейся за пределами конуса, используется формула для нахождения площади сферического сегмента. Расскажем подробнее о сферическом сегменте и о нахождении его площади.

Плоскость, пересекающая сферу, делит её на две части, называемые *сферическими сегментами*. Каждому сферическому сегменту соответствует шаровой сегмент и шаровой сектор, границы которых содержат данный сферический сегмент.

Определение. За *площадь сферического сегмента* по определению принимается предел отношения приращения объёма соответствующего шарового сектора к приращению радиуса, когда приращение радиуса стремится к нулю.

Найдём формулу площади сферического сегмента, пользуясь формулой для объёма шарового сегмента (эта формула доказывается в курсе школьной геометрии): $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$. Чтобы получить функцию одного переменного R , выразим высоту h через радиус R и половину φ центрального угла сектора: $h = R - R \cdot \cos \varphi$, где φ не зависит от приращения ε радиуса. Тогда



$$V = \frac{2}{3}\pi R^3(1 - \cos \varphi).$$

Согласно определению площади S сферического сегмента

$$S = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\varepsilon} = V'_R = 2\pi R^2(1 - \cos \varphi) = 2\pi R \cdot R(1 - \cos \varphi) = 2\pi R h.$$

Таким образом, площадь сферического сегмента с высотой h радиуса R вычисляется по формуле

$$S = 2\pi R h.$$

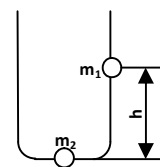
Можно не пользоваться операцией дифференцирования, а найти предел $\frac{\Delta V}{\varepsilon}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ непосредственно:

$$\Delta V = \frac{2}{3}\pi(1 - \cos \varphi)((R + \varepsilon)^2 - R^2) = \frac{2\pi}{3}(1 - \cos \varphi)\varepsilon(3R^2 + 3R\varepsilon + \varepsilon^2),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\varepsilon} = \frac{2\pi}{3}(1 - \cos \varphi)3R^2 = 2\pi R^2(1 - \cos \varphi).$$

Физика.

Ф1011. По изогнутой спице могут без трения скользить шарики массами m_1 и m_2 . Изначально покоящийся шарик массой m_2 расположен на горизонтальном отрезке спицы, а шарик массой m_1 – на вертикальном отрезке спицы так, как показано на рисунке. Затем шарик массой m_1 отпускают без начальной скорости. При неупругом соударении шарики слипаются, и выделяется количество теплоты Q .



- 1) Найдите высоту h .
- 2) Найдите максимальную высоту h_{max} , на которую поднимутся слипшиеся шарики.

Решение. Пусть v – скорость шарика массой m_1 непосредственно перед столкновением с шариком массой m_2 . Так как трение отсутствует, закон сохранения энергии принимает следующий вид:

$$m_1 gh = \frac{m_1 v^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2gh}.$$

Рассмотрим процесс столкновения шариков. Так как система замкнута в горизонтальном направлении, то для неё выполняется закон сохранения импульса.

Пусть u – скорость шариков после слипания.

$$(m_1 + m_2)u = m_1 \sqrt{2gh} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \frac{m_1 \sqrt{2gh}}{m_1 + m_2}.$$

$$Q + \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = m_1 gh \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \frac{Q(m_1 + m_2)}{gm_1 m_2}.$$

Теперь рассмотрим движение двух слипшихся шариков. Так как трение отсутствует, закон сохранения энергии принимает следующий вид:

$$(m_1 + m_2)gh_{max} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} \Rightarrow h_{max} = \frac{Qm_1}{gm_2(m_1 + m_2)}.$$

Ответ:

$$1) h = \frac{Q(m_1 + m_2)}{gm_1 m_2};$$

$$2) h_{max} = \frac{Qm_1}{gm_2(m_1 + m_2)}.$$

Ф1012. В цилиндре под поршнем находятся воздух, пар и вода. После увеличения объёма цилиндра под поршнем в 5 раз количество молекул пара увеличилось на 20%, пар стал ненасыщенным. Какой стала относительная влажность воздуха под поршнем? Считайте, что температура в цилиндре поддерживается постоянной.

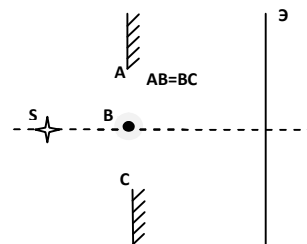
Решение. Рассмотрим одну составляющую влажного воздуха – пар. Первоначально в цилиндре под поршнем находился воздух, пар и вода, значит, пар является насыщенным, его давление равно $p_{\text{нп}}$, его масса равна $m_{\text{п}}$. В конце опыта (после расширения в 5 раз) пар является ненасыщенным, его давление равно $\varphi p_{\text{нп}}$, его масса равна $1,2m_{\text{п}}$. Итак:

$$p_{\text{нп}} \cdot V = \frac{m_{\text{п}}}{\mu} RT; \quad \varphi p_{\text{нп}} \cdot 5V = \frac{1,2m_{\text{п}}}{\mu} RT \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = 24\%.$$

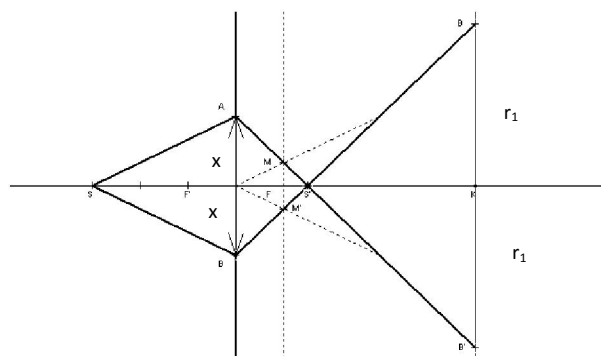
Ответ: $\varphi = 24\%$.

Ф1013. В непрозрачной ширме имеется круглое отверстие. За ширмой стоит экран Э, а перед ней находится точечный источник света S , как показано на рисунке. Сначала в отверстие помещают тонкую собирающую линзу. Затем в отверстие помещают тонкую рассеивающую линзу. В обоих случаях линза полностью закрывает собой отверстие. Фокусные расстояния линз одинаковы. Определить отношение площадей светлых пятен, полученных на экране в первом и втором случаях, если расстояние от точечного источника света S до ширмы в 3 раза больше фокусного расстояния линзы, а расстояние от ширмы до экрана в 5 раз больше фокусного.



Решение.

Рассмотрим случай с собирающей линзой. На рисунке представлен ход лучей, преломлённых линзой. Займёмся геометрией.



Из подобия треугольников OFM и SOA :

$$MF = AO \cdot \frac{OF}{SO} = AO \cdot \frac{F}{3F} = \frac{x}{3}.$$

Из подобия треугольников $S'FM$ и $S'OA$:

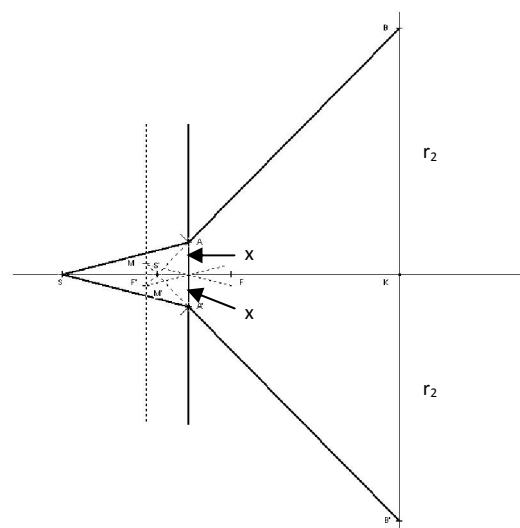
$$S'F = S'O \cdot \frac{MF}{AO} = \frac{S'O}{3}, f - F = \frac{f}{3} \Rightarrow OS' = f = \frac{3}{2}F.$$

Из подобия треугольников $S'OA$ и $S'KB$:

$$\frac{KB}{AO} = \frac{S'K}{S'O} \Rightarrow r_1 = x \cdot \frac{L-f}{f} = \frac{7}{3}x.$$

Таким образом, на экране будет освещён круг, площадь которого $S_1 = \pi r_1^2$.

Рассмотрим случай с рассеивающей линзой. На рисунке представлен ход лучей, преломлённых линзой. Займёмся геометрией.



Из подобия треугольников $F'S'M'$ и $OS'A$:

$$F'S' = S'O \cdot \frac{F'M'}{AO} = \frac{f}{3} = F - f, F = \frac{4}{3}f \Rightarrow f = \frac{3}{4}F.$$

Из подобия треугольников $S'OA$ и $S'KB$:

$$\frac{KB}{AO} = \frac{S'K}{S'O} \Rightarrow r_2 = x \cdot \frac{L+f}{f} = \frac{23}{7}x.$$

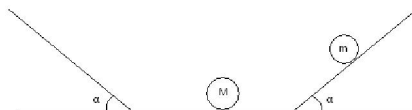
Таким образом, на экране будет освещён круг, площадь которого $S_2 = \pi r_2^2$.

Итак, искомое отношение площадей

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \left(\frac{23}{7}\right)^2.$$

Ответ: $\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \left(\frac{23}{7}\right)^2.$

Ф1021. Шарик массой m удерживается на наклонной плоскости, шарик массой M покоится на горизонтальной плоскости так, как показано на рисунке. Затем шарик массой m отпускают без начальной скорости. При неупругом соударении шарики слипаются, и выделяется количество теплоты Q . Определить отношение пути l_1 , пройденного первым шариком по наклонной плоскости, к пути l_2 , пройденного шариками вместе по второй наклонной плоскости до остановки. Вращательными эффектами пренебречь, поверхности наклонных плоскостей и горизонтальной плоскости считать гладкими.



Решение. Пусть v – скорость шарика массой m_1 непосредственно перед столкновением с шариком массой m_2 . Так как трение отсутствует, закон сохранения энергии принимает следующий вид:

$$mgh_1 = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2gh_1},$$

где h_1 – высота, на которой находился шарик в начальный момент времени (относительно горизонтальной плоскости).

Рассмотрим процесс столкновения шариков. Так как система замкнута в горизонтальном направлении, то для неё выполняется закон сохранения импульса.

Пусть u – скорость шариков после слипания.

$$(m + M)u = m\sqrt{2gh_1} \Rightarrow u = \frac{m\sqrt{2gh_1}}{m + M}.$$

$$Q + \frac{(m + M)u^2}{2} = mgh_1 \Rightarrow h_1 = \frac{Q(m + M)}{gmM}.$$

Теперь рассмотрим движение двух слипшихся шариков. Так как трение отсутствует, закон сохранения энергии принимает следующий вид:

$$(m + M)gh_2 = \frac{(m + M)u^2}{2} \Rightarrow h_2 = \frac{Qm}{gM(m + M)}.$$

Теперь заметим, что $l_1 = \frac{h_1}{\sin \alpha}$, $l_2 = \frac{h_2}{\sin \alpha}$. Тогда $\frac{l_1}{l_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{Q(m+M) \cdot gM(m+M)}{gmM \cdot Qm} = \frac{(m+M)^2}{m^2}$.

Ответ: $\frac{l_1}{l_2} = \frac{(m+M)^2}{m^2}$.

Ф1022. В цилиндре под поршнем находятся воздух, пар и вода. После увеличения объёма цилиндра под поршнем количество молекул пара увеличилось на 40%, пар стал ненасыщенным. Определить, на сколько увеличили объём, если известно, что относительная влажность воздуха после увеличения объёма составила 20%. Считайте, что температура в цилиндре поддерживается постоянной, начальный объём V_0 .

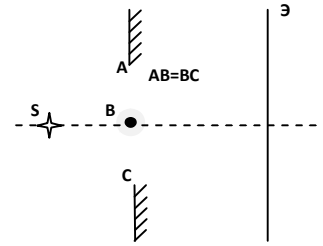
Решение. Рассмотрим одну составляющую влажного воздуха – пар. Первоначально в цилиндре под поршнем находился воздух, пар и вода, значит, пар является насыщенным, его давление равно $p_{\text{нп}}$, его масса равна $m_{\text{п}}$. В конце опыта (после расширения в x раз) пар является ненасыщенным, его давление равно $0,2p_{\text{нп}}$, его масса равна $1,4m_{\text{п}}$. Итак:

$$p_{\text{нп}} \cdot V = \frac{m_{\text{п}}}{\mu} RT; \quad 0,2p_{\text{нп}} \cdot xV = \frac{1,4m_{\text{п}}}{\mu} RT \Rightarrow x = 7.$$

Тогда, учитывая, что начальный объём V_0 , получим $\Delta V = 7V_0 - V_0 = 6V_0$.

Ответ: $\Delta V = 6V_0$

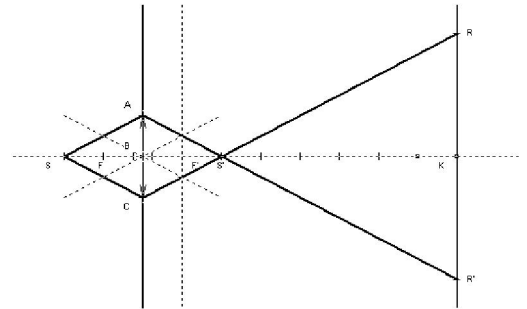
Ф1023. В непрозрачной ширме имеется круглое отверстие. За ширмой стоит экран Э, а перед ней находится точечный источник света S , как показано на рисунке. Сначала в отверстие помещают тонкую собирающую линзу. Затем в отверстие помещают тонкую рассеивающую линзу, а экран сдвигают по оси линзы. В обоих случаях линза полностью закрывает собой отверстие. Фокусные расстояния линз одинаковы и равны F . Известно, что площади световых пятен, полученных на экране в первом и во втором случаях, одинаковы. Найдите расстояние от экрана до линзы в случае, когда линза рассеивающая, если известно, что в случае собирающей линзы расстояние от источника S до линзы равно $2F$, расстояние от линзы до экрана равно $8F$. В каждом из случаев ширма и источник остаются на месте.



Решение. Построим ход лучей после их преломления в линзе для обоих случаев, т.е. для собирающей и рассеивающей линзы. Ход лучей можно видеть на рисунках. Займёмся подсчётом.

Для собирающей линзы

$$+\frac{1}{F} = +\frac{1}{f} + \frac{1}{d} \Rightarrow f = \frac{1}{\frac{1}{F} - \frac{1}{d}} = 2F.$$



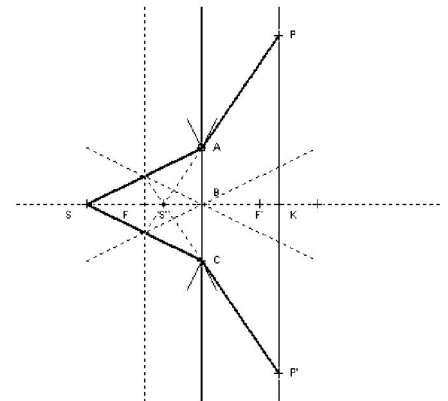
Тогда запишем следующие отношения:

$$\frac{x}{r_1} = \frac{2F}{8F - 2F} \Rightarrow x = \frac{1}{3}r_1,$$

где x – ширина линзы, r_1 – радиус светового пятна на экране.

Для рассеивающей линзы

$$-\frac{1}{F} = +\frac{1}{d} + \frac{1}{f} \Rightarrow f = \frac{1}{-\frac{1}{d} - \frac{1}{F}} = -\frac{2}{3}F.$$



Тогда запишем следующие отношения:

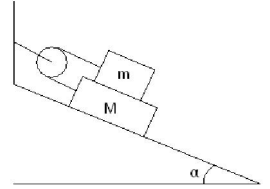
$$\frac{x}{r_2} = \frac{\frac{2}{3}F}{\frac{2}{3}F + X},$$

где x – ширина линзы, r_1 – радиус светового пятна на экране, X – расстояние от рассеивающей линзы до экрана. Тогда, учитывая, что $r_1 = r_2$ по условию, получим:

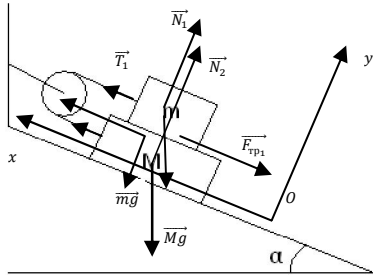
$$\frac{\frac{2}{3}F}{\frac{2}{3}F + X} = \frac{\frac{1}{3}r_2}{r_2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2F = \frac{2}{3}F + X \Leftrightarrow X = \frac{4}{3}F.$$

Ответ: $X = \frac{4}{3}F$.

Ф1111. К концам нити, перекинутой через невесомый блок, привязаны бруски с массами m и $M = 4m$, находящиеся на гладкой наклонной плоскости с углом наклона к горизонту $\alpha = 30^\circ$. При каком минимальном значении коэффициента трения скольжения между брусками они будут покоиться относительно земли? Нить считайте невесомой и нерастяжимой.



Решение.



Для начала выберем систему координат так, как показано на рисунке, и укажем силы, действующие на тела.

На тело массы m действуют сила тяжести \vec{mg} , сила в результате взаимодействия с нитью \vec{T}_1 , силы взаимодействия $\vec{F}_{\text{тр}1}$ и \vec{N}_1 с телом массы M .

На тело массы M действуют сила тяжести \vec{Mg} , сила в результате взаимодействия с нитью \vec{T}_2 , силы взаимодействия $\vec{F}_{\text{тр}2}$ и \vec{P}_{12} с телом массы m , сила в результате взаимодействия с наклонной плоскостью \vec{N}_2 . (на рисунке не указаны или не подписаны силы $\vec{F}_{\text{тр}2}$, \vec{P}_{12} , \vec{T}_2 , дабы не загромождать чертёж).

Запишем второй закон Ньютона для обоих тел:

$$1: \vec{ma}_1 = \vec{mg} + \vec{T}_1 + \vec{F}_{\text{тр}1} + \vec{N}_1;$$

$$2: \vec{Ma}_2 = \vec{Mg} + \vec{T}_2 + \vec{F}_{\text{тр}2} + \vec{N}_2 + \vec{P}_{12}.$$

По условию тела покоятся относительно земли, значит, $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{0}$. Поскольку нить по условию невесома и нерастяжима, то $\vec{T}_1 = \vec{T}_2 = \vec{T}$.

Распишем проекции наших уравнений на выбранные нами оси координат:

$$1: \begin{aligned} OX: 0 &= -mg \sin \alpha + T - F_{\text{тр}1}; \\ OY: 0 &= -mg \cos \alpha + N_1 \end{aligned}$$

$$2: \begin{aligned} OX: 0 &= -Mg \sin \alpha + T + F_{\text{тр}2}; \\ OY: 0 &= -Mg \cos \alpha - P_{12} + N_2. \end{aligned}$$

Заметим, что $F_{\text{тр}1} = F_{\text{тр}2} = F_{\text{тр}}$, $|\vec{P}_{12}| = |\vec{N}_1|$. Выразим из полученных уравнений T :

$$T = mg \sin \alpha + F_{\text{тр}};$$

$$T = Mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}.$$

Тогда получим, что $mg \sin \alpha + F_{\text{тр}} = Mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} \Rightarrow F_{\text{тр}} = \frac{(M-m)}{2} g \sin \alpha$.

Заметим, что получили $F_{\text{тр}} > 0$, т.е. наш выбор в расстановке сил оказался верным.

Вспомянув закон Кулона-Амонтона: $F_{\text{тр}} \leq F_{\text{тр}}^{\text{max}} = \mu N_1 = \mu mg \cos \alpha$, получим, что

$$\mu \geq \frac{M-m}{2m} \tan \alpha \Rightarrow \boxed{\mu_{\min} = \frac{M-m}{2m} \tan \alpha}.$$

Подставляя данные задачи, получим $\mu_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **Ответ:** $\mu_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ф1112. Рабочим телом тепловой машины является двухатомный идеальный газ. Машина совершает работу по циклу $1-2-3-1$, состоящего из изобарического расширения $1-2$, участка $2-3$ линейной зависимости давления от объёма и адиабатического сжатия $3-1$. Известно, что в процессе $1-2$ газ совершает работу A_{12} , а в процессе $2-3$ над газом совершается работа A_{23} . Точки 2 и 3 на PV -диаграмме лежат на прямой, проходящей через начало координат. Найдите КПД η данной тепловой машины.

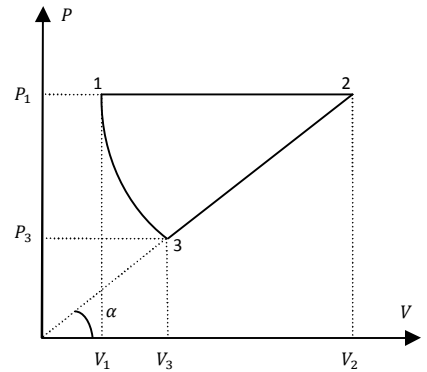
Решение. Нарисуем график зависимости $P(V)$ для данной тепловой машины. Его можно видеть на рисунке.

Для каждого из состояний 1, 2 и 3 ν молей идеального газа запишем уравнение состояния (Менделеева-Клапейрона):

$$P_1 V_1 = \nu R T_1, P_1 V_2 = \nu R T_2 \text{ и } P_3 V_3 = \nu R T_3.$$

Заметим, что идеальный газ является двухатомным, значит,

$$C_V = \frac{5}{2}R, C_P = \frac{7}{2}R.$$



Сразу отметим, что в процессе $1-2$ тепло к газу подводится ($Q_{12} > 0$), в процессе $2-3$ тепло от газа отводится ($Q_{23} < 0$), в процессе $3-1$ газ теплоизолирован ($Q_{31} = 0$). Суммарное подведённое тепло за весь цикл есть Q_{12} . В соответствии с обозначениями в условии задачи в процессе $1-2$ работа газа равна A_{12} , в процессе $2-3$ работа газа равна $(-A_{23})$ и в процессе $3-1$ работа газа равна $(-A_{31})$, поэтому работа газа во всём цикле $A = A_{12} - A_{23} - A_{31}$.

Рассмотрим процесс $1-2$:

$$\Delta U_{12} = C_V \nu (T_2 - T_1); A_{12} = P_1 (V_2 - V_1) = P_1 V_2 - P_1 V_1 = \nu R (T_2 - T_1) \Rightarrow \boxed{A_{12} = \nu R (T_2 - T_1)};$$

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = \frac{5}{2} \nu R (T_2 - T_1) + \nu R (T_2 - T_1) = \frac{7}{2} \nu R (T_2 - T_1) \Rightarrow \boxed{Q_{12} = \frac{7}{2} A_{12}}.$$

Отметим, что в данном процессе Q_{12} удобно искать по определению:

$$Q_{12} = C_P \nu (T_2 - T_1) = \frac{7}{2} \nu R (T_2 - T_1).$$

Рассмотрим процесс $2-3$:

$$U_{23} = C_V \nu (T_3 - T_2) = \frac{5}{2} \nu R (T_3 - T_2);$$

Прямая $2-3$ PV -диаграммы проходит через начало координат, поэтому

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_1}{V_2} = \frac{P_3}{V_3} \Rightarrow P_1 V_3 = P_3 V_2.$$

$$(-A_{23}) = -\frac{P_1 + P_3}{2} (V_2 - V_3) = -\frac{1}{2} (P_1 V_2 - P_1 V_3 + P_3 V_2 - P_3 V_3) = -\frac{1}{2} (P_1 V_2 - P_3 V_3) = -\frac{1}{2} \nu R (T_2 - T_3)$$

$$\Rightarrow \boxed{A_{12} = \frac{1}{2} \nu R (T_2 - T_3)}.$$

Рассмотрим процесс $3-1$:

$$\Delta U_{31} = C_V \nu (T_1 - T_3) = \frac{5}{2} \nu R (T_1 - T_3); Q_{31} = \Delta U_{31} + (-A_{31}) = 0 \Rightarrow A_{31} = \Delta U_{31} = \frac{5}{2} \nu R (T_1 - T_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{31} = \frac{5}{2} \nu R (T_1 - T_3).$$

Из уравнений, выделенных рамкой, получим, что

$$T_1 - T_2 = -\frac{A_{12}}{\nu R}; T_2 - T_3 = \frac{2A_{23}}{\nu R}.$$

Отсюда получаем, что:

$$1) A_{31} = \frac{5}{2} \nu R (T_1 - T_3) = \frac{5}{2} \nu R (T_1 - T_2 + T_2 - T_3) = \frac{5}{2} \nu R \left(-\frac{A_{12}}{\nu R} + \frac{2A_{23}}{\nu R} \right) = \frac{5}{2} (2A_{23} - A_{12})$$

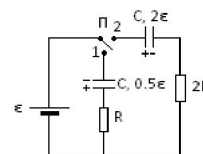
$$= 5A_{23} - \frac{5}{2} A_{12}.$$

$$2) \text{ Работа газа за весь цикл } A = A_{12} - A_{23} - A_{31} = A_{12} - A_{23} - \left(5A_{23} - \frac{5}{2} A_{12} \right) = \frac{7}{2} A_{12} - 6A_{23}.$$

$$3) \text{ КПД данной тепловой машины } \eta = \frac{A}{Q_{12}} \cdot 100\% = \frac{\frac{7}{2} A_{12} - 6A_{23}}{\frac{7}{2} A_{12}} \cdot 100\% = \left(1 - \frac{12}{7} \frac{A_{23}}{A_{12}} \right) \cdot 100\%.$$

Ответ: $\eta = \left(1 - \frac{12}{7} \frac{A_{23}}{A_{12}} \right) \cdot 100\%.$

Ф1113. В электрической схеме, изображённой на рисунке, переключатель П изначально разомкнут, конденсаторы заряжены. Сначала переключатель П замыкают в положение 1. В момент времени $t = \tau$, когда ток через конденсатор становится равным нулю, переключатель П замыкают в положение 2. Определите отношение теплоты Q_1 , выделившейся на резисторе сопротивлением R , к теплоте Q_2 , выделившейся на резисторе сопротивлением $2R$. Внутренним сопротивлением батареи можно пренебречь.



Решение.

Рассмотрим первое положение переключателя – положение 1.

В установившемся режиме напряжение на конденсаторе равно ε , заряд на верхней обкладке $+C\varepsilon$, на нижней обкладке $-C\varepsilon$. Таким образом, заряд, протёкший через батарею в первом случае, $\Delta q_1 = C\varepsilon - \left(-C\frac{\varepsilon}{2} \right) = \frac{3}{2} C\varepsilon$.

Изменение энергии конденсатора

$$\Delta W_1 = \frac{C\varepsilon^2}{2} - \frac{C\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}{2} = \frac{C\varepsilon^2}{2} - \frac{C\varepsilon^2}{8} = \frac{3}{8} C\varepsilon^2.$$

Работа батареи

$$A_1^{\text{бат}} = \varepsilon \Delta q_1 = \frac{3}{2} C\varepsilon^2.$$

По закону сохранения энергии $A^{\text{бат}} = Q + \Delta W$, значит,

$$Q_1 = A_1^{\text{бат}} - \Delta W_1 = \frac{3}{2} C\varepsilon^2 - \frac{3}{8} C\varepsilon^2 = \frac{9}{8} C\varepsilon^2.$$

Рассмотрим второе положение переключателя – положение 2.

В установившемся режиме напряжение на конденсаторе равно ε , заряд на левой обкладке $+C\varepsilon$, на правой обкладке $-C\varepsilon$. Таким образом, заряд, протёкший через батарею в первом случае, $\Delta q_2 = C\varepsilon - 2C\varepsilon = -C\varepsilon$.

Изменение энергии конденсатора

$$\Delta W_2 = \frac{C\varepsilon^2}{2} - \frac{C(2\varepsilon)^2}{2} = \frac{C\varepsilon^2}{2} - \frac{4C\varepsilon^2}{2} = -\frac{3}{2}C\varepsilon^2.$$

Работа батареи

$$A_2^{\text{бат}} = \varepsilon \Delta q_2 = -C\varepsilon^2.$$

По закону сохранения энергии $A^{\text{бат}} = Q + \Delta W$, значит,

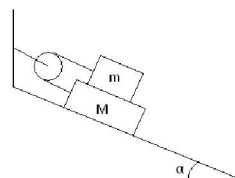
$$Q_2 = A_2^{\text{бат}} - \Delta W_2 = -C\varepsilon^2 - \left(-\frac{3}{2}C\varepsilon^2\right) = \frac{1}{2}C\varepsilon^2.$$

Тогда получим, что

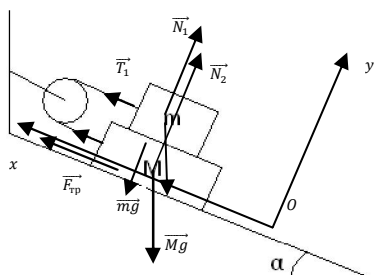
$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\frac{9}{8}C\varepsilon^2}{\frac{1}{2}C\varepsilon^2} = \frac{9}{4}.$$

Ответ: $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{9}{4}$.

Ф1121. Бруски с массами m и $M = 2m$ привязаны к концам нити, перекинутой через блок. Система находится на наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 60^\circ$. При каком минимальном значении коэффициента трения μ между нижним бруском и наклонной плоскостью бруски будут покоиться? Трением между брусками можете пренебречь.



Решение.



Для начала выберем систему координат так, как показано на рисунке, и укажем силы, действующие на тела.

На тело массы m действуют сила тяжести \vec{mg} , сила в результате взаимодействия с нитью \vec{T}_1 , сила в результате взаимодействия с телом массы M \vec{N}_1 .

На тело массы M действуют сила тяжести \vec{Mg} , сила в результате взаимодействия с нитью \vec{T}_2 , силы взаимодействия $\vec{F}_{тр}$ и \vec{P}_{12} с телом массы m , сила в результате взаимодействия с наклонной плоскостью \vec{N}_2 . (на рисунке не указаны или не подписаны силы \vec{P}_{12} , \vec{T}_2 , дабы не загромождать чертёж).

Запишем второй закон Ньютона для обоих тел:

$$1: \vec{ma}_1 = \vec{mg} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1;$$

$$2: \vec{Ma}_2 = \vec{Mg} + \vec{T}_2 + \vec{F}_{тр} + \vec{N}_2 + \vec{P}_{12}.$$

По условию тела покоятся относительно земли, значит, $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{0}$. Поскольку нить по условию невесома и нерастяжима, то $\vec{T}_1 = \vec{T}_2 = \vec{T}$.

Распишем проекции наших уравнений на выбранные нами оси координат:

$$1: \begin{aligned} OX: 0 &= -mg \sin \alpha + T \\ OY: 0 &= -mg \cos \alpha + N_1 \end{aligned}$$

$$2: \begin{aligned} OX: 0 &= -Mg \sin \alpha + T + F_{тр} \\ OY: 0 &= -Mg \cos \alpha - P_{12} + N_2 \end{aligned}$$

Заметим, что $F_{тр1} = F_{тр2} = F_{тр}$, $|\vec{P}_{12}| = |\vec{N}_1|$. Выразим из полученных уравнений T :

$$T = mg \sin \alpha;$$

$$T = Mg \sin \alpha - F_{тр}.$$

Тогда получим, что $mg \sin \alpha = Mg \sin \alpha - F_{тр} \Rightarrow F_{тр} = (M - m)g \sin \alpha$.

Заметим, что получили $F_{тр} > 0$, т.е. наш выбор в расстановке сил оказался верным.

Вспомянув закон Кулона-Амонтона: $F_{тр} \leq F_{тр}^{max} = \mu N_2 = \mu(M + m)g \cos \alpha$, получим, что

$$\mu \geq \frac{M - m}{M + m} \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \boxed{\mu_{min} = \frac{M - m}{M + m} \operatorname{tg} \alpha}.$$

Подставляя данные задачи, получим $\mu_{min} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **Ответ:** $\mu_{min} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ф1122. Рабочим телом тепловой машины является двухатомный идеальный газ. Машина совершает работу по циклу $1 - 2 - 3 - 1$, состоящего из адиабатического сжатия $1 - 2$, изотермического расширения $2 - 3$ и участка $3 - 1$ линейной зависимости давления газа от объёма. Известно, что на участке $1 - 2$ совершается работа сжатия A_{12} ($A_{12} > 0$), а вся работа за цикл равна A . Точки 3 и 1 на PV -диаграмме лежат на прямой, проходящей через начало координат. Найдите работу A_{23} , которую совершил газ в процессе изотермического расширения.

Решение.

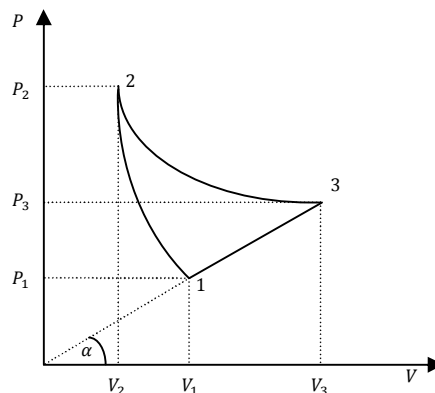
Нарисуем график зависимости $P(V)$ для данной тепловой машины. Его можно видеть на рисунке.

Для каждого из состояний 1, 2 и 3 ν молей идеального газа запишем уравнение состояния (Менделеева-Клапейрона):

$$P_1 V_1 = \nu R T_1, P_2 V_2 = \nu R T_2 \text{ и } P_3 V_3 = \nu R T_3.$$

Заметим, что идеальный газ является двухатомным, значит,

$$C_V = \frac{5}{2}R, C_P = \frac{7}{2}R.$$



Сразу отметим, что в процессе $2 - 3$ тепло к газу подводится ($Q_{23} > 0$), в процессе $3 - 1$ тепло от газа отводится ($Q_{31} < 0$), в процессе $1 - 2$ газ теплоизолирован ($Q_{12} = 0$). Суммарное подведённое тепло за весь цикл есть Q_{23} . В соответствии с обозначениями в условии задачи в процессе $1 - 2$ работа газа равна ($-A_{12}$), в процессе $2 - 3$ работа газа равна A_{23} и в процессе $3 - 1$ работа газа равна ($-A_{31}$), поэтому работа газа во всём цикле $A = -A_{12} + A_{23} - A_{31}$.

Рассмотрим процесс 1 - 2:

$$\Delta U_{12} = \frac{5}{2} \nu R (T_2 - T_1) = \frac{5}{2} \nu R (T_3 - T_1); Q_{12} = (-A_{12}) + \Delta U_{12} = 0; \Delta U_{12} = A_{12} = \frac{5}{2} \nu R (T_3 - T_1).$$

Рассмотрим процесс 2 - 3:

$$\Delta U_{23} = 0; A_{23} = A + A_{12} + A_{31}.$$

Рассмотрим процесс 3 - 1:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_1}{V_1} = \frac{P_3}{V_3} \Rightarrow P_1 V_3 = P_3 V_1.$$

$$\Delta U_{31} = \frac{5}{2} \nu R (T_3 - T_1); -A_{31} = -\frac{P_1 + P_3}{2} (V_3 - V_1) = -\frac{1}{2} (P_1 V_3 - P_1 V_1 + P_3 V_3 - P_3 V_1) = -\frac{1}{2} \nu R (T_3 - T_1);$$

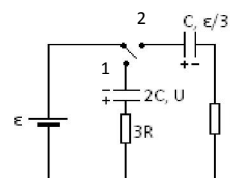
$$A_{31} = \frac{1}{2} \nu R (T_3 - T_1) = \frac{A_{12}}{5}.$$

Тогда получаем, что

$$A_{23} = A + A_{12} + A_{31} = A + A_{12} + \frac{A_{12}}{5} = A + \frac{6}{5} A_{12}.$$

Ответ: $A_{23} = A + \frac{6}{5} A_{12}$.

Ф1123. В электрической схеме, изображённой на рисунке, переключатель Π разомкнут, конденсаторы заряжены. Сначала переключатель Π замыкают в положение 1. В момент времени $t = \tau$, когда ток через конденсатор становится равным нулю, переключатель Π замыкают в положение 2. Известно, что отношение теплоты Q_1 , выделившейся на резисторе сопротивлением $3R$, к



теплоте Q_2 , выделившейся на резисторе сопротивлением R , равно $7/6$. Определите величину начального напряжения U на конденсаторе 1, если в начальный момент времени знак заряда на его нижней пластине положителен. Внутренним сопротивлением батареи можно пренебречь.

Решение.

Рассмотрим первое положение переключателя – положение 1.

В установившемся режиме напряжение на конденсаторе равно ε , заряд на верхней обкладке $+2C\varepsilon$, на нижней обкладке $-2C\varepsilon$. Таким образом, заряд, протёкший через батарею в первом случае,

$$\Delta q_1 = 2C\varepsilon - 2CU = 2C(\varepsilon - U)$$

Изменение энергии конденсатора

$$\Delta W_1 = \frac{2C\varepsilon^2}{2} - \frac{2CU^2}{2} = C(\varepsilon^2 - U^2).$$

Работа батареи

$$A_1^{\text{бат}} = \varepsilon \Delta q_1 = 2C\varepsilon(\varepsilon - U).$$

По закону сохранения энергии $A^{\text{бат}} = Q + \Delta W$, значит,

$$Q_1 = A_1^{\text{бат}} - \Delta W_1 = 2C\varepsilon(\varepsilon - U) - C(\varepsilon^2 - U^2) = 2C\varepsilon^2 - 2C\varepsilon U - C\varepsilon^2 + CU^2 = C(\varepsilon - U)^2$$

Рассмотрим второе положение переключателя – положение 2.

В установившемся режиме напряжение на конденсаторе равно ε , заряд на левой обкладке $+C\varepsilon$, на правой обкладке $-C\varepsilon$. Таким образом, заряд, протёкший через батарею в первом случае, $\Delta q_2 = C\varepsilon - \frac{1}{3}C\varepsilon = \frac{2}{3}C\varepsilon$.

Изменение энергии конденсатора

$$\Delta W_2 = \frac{C\varepsilon^2}{2} - \frac{C\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2}{2} = \frac{C\varepsilon^2}{2} - \frac{C\varepsilon^2}{18} = \frac{4}{9}C\varepsilon^2.$$

Работа батареи

$$A_2^{\text{бат}} = \varepsilon \Delta q_2 = \frac{2}{3}C\varepsilon^2.$$

По закону сохранения энергии $A^{\text{бат}} = Q + \Delta W$, значит,

$$Q_2 = A_2^{\text{бат}} - \Delta W_2 = \frac{2}{3}C\varepsilon^2 - \frac{4}{9}C\varepsilon^2 = \frac{2}{9}C\varepsilon^2.$$

Тогда получим, что

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{C(\varepsilon - U)^2}{\frac{2}{9}C\varepsilon^2} = \frac{9(\varepsilon - U)^2}{2\varepsilon^2} = \frac{7}{6} \Rightarrow \frac{\varepsilon - U}{\varepsilon} = \sqrt{\frac{7}{27}} \Rightarrow U = \left(1 - \sqrt{\frac{7}{27}}\right)\varepsilon.$$

Ответ: $U = \left(1 - \sqrt{\frac{7}{27}}\right)\varepsilon$.